XVII Заочная интернет-олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

27 ноября 2023 г. — 7 января 2024 г.

Решения задач

1. Кольцевые маршруты (рек. от 7 класса, 1 балл). Дирекция железной дороги решила запустить туристические кольцевые маршруты. Кольцевой маршрут должен начинаться на какой-то станции и возвращаться на эту же станцию, но только один раз – в конце маршрута.

Изучение железнодорожной сети показало, что перегонов между станциями на 4 больше, чем самих станций.

Главный Директор потребовал, чтобы было не менее четырех различных маршрутов.

Главный Машинист выразил опасение:

– Я думаю, что мы сможем найти только три-четыре кольцевых маршрута. Больше просто нет.

– Я уверен, что мы сумеем устроить не меньше пяти кольцевых маршрутов, – возразил ему Главный Кондуктор.

Кто прав – Машинист или Кондуктор?

Ответ: Кондуктор**.**

Решение. Легко привести пример графа, в котором вершин на четыре меньше, чем ребер, и существует намного больше чем четыре цикла. Вопрос в том, может ли оказаться прав Главный Машинист?

Предположим, что он прав, и в графе железных дорог 4 цикла или меньше. Разомкнем эти циклы. Это можно сделать, убрав не более четырех ребер. В результате получится дерево, в котором n вершин и $n-1$ ребро. Значит, в исходном графе было n вершин и не более чем $n+3$ ребра. Противоречие.

2. Разность между средним и медианой. Из 40 последовательных нечетных чисел 1, 3, 5, …, 79 выбрали 7 различных чисел в порядке возрастания и вычислили их среднее арифметическое $\overline{x}$ и медиану m.

а) **(рек. от 7 класса, 1 балл).** Может ли быть так, что $\overline{x}-m=\frac{2}{7}$?

б) **(рек. от 7 класса, 2 балла).** Может ли быть так, что $\overline{x}-m=\frac{3}{7}$?

в) **(рек. от 8 класса, 3 балла).** Найдите наибольшее возможное значение разности $\overline{x}-m$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{198}{7}$.

Решение. Обозначим медиану буквой m. Она равна четвертому числу в выбранном наборе. Среднее арифметическое обозначим $\overline{x}$.

а) Например, для чисел 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15 разность $\overline{x}-m$ равна

$$\frac{1+3+5+7+9+11+15}{7}-7=\frac{51}{7}-7=\frac{2}{7}.$$

б) Пусть выбраны числа a_1, a_2, …, a_7. Тогда

$$\bar{x}-m=\frac{a_1+a_2+a_3-6a_4+a_5+a_6+a_7}{7}.$$

Числитель — четное число. Значит, $\bar{x}-m$ не может равняться $\frac{3}{7}$.

в) Представим выбранные числа в виде $m-c_1$, $m-c_2$, $m-c_3$, m, $m+d_1$, $m+d_2$, $m+d_3$, где $c_1>c_2>c_3>0$ и $0<d_1<d_2<d_3$. Числа c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 четные, поэтому $c_1+c_2+c_3\geq 6+4+2=12$. Поскольку $m\geq 7$ и $a_7\leq 79$,

$$d_1+d_2+d_3\leq 68+70+72=210.$$

Значит,

$$\bar{x}-m=\frac{(d_1+d_2+d_3)-(c_1+c_2+c_3)}{7}\leq\frac{210-12}{7}=\frac{198}{7}.$$

Больше чем $\frac{198}{7}$ разность $\bar{x}-m$ быть не может. Для чисел 1, 3, 5, 7, 75, 77, 79 эта разность равна $\frac{198}{7}$. Значит, наибольшее возможное значение $\bar{x}-m$ равно $\frac{198}{7}$.

3. Красное и черное. Имеется много красных и столько же черных карточек. Их тщательно перемешали и сложили в стопку. Валя и Коля играют в следующую игру. Вначале каждый получает 15 случайных карточек. Чужие карточки игрок не видит. Затем из стопки достают еще две случайные карточки. Если обе они красные, то Валя выиграла, если обе карточки черные, то Валя проиграла, а если эти две карточки разных цветов, то наступает ничья.

Путем сложных расчетов Валя нашла, что если вначале у нее из 15 карточек ровно 5 красных, то вероятность ее выигрыша больше вероятности ее проигрыша на число α. На сколько отличаются вероятности выигрыша и проигрыша Вали, если у нее вначале оказалось:

а) (рек. от 7 класса, 1 балл) ровно 10 красных карточек из 15;

б) (рек. от 9 класса, 3 балла) ровно 11 красных карточек из 15?

Ответ: вероятность выигрыша меньше на: а) α; б) $1,4\alpha$.

Решение. а) Если у Вали 10 красных карт, то у нее 5 черных, поэтому вероятность ее проигрыша на α больше вероятности ее выигрыша.

б) Пусть в колоде n красных и n черных карт. Если в начале игры у Вали оказалось k красных карт из 15, то закрытыми для нее остаются $n-k$ красных и $n-15+k$ черных карт. Именно из этого множества выбирают две дополнительные случайные карты. Вероятности того, что они обе окажутся красными, равна

$$\frac{C_{n-k}^2}{C_{2n-15}^2}=\frac{(n-k)(n-1-k)}{2C_{2n-15}^2}=\frac{1}{2C_{2n-15}^2}k^2+ak+b,$$

где a и b – какие-то числа.

Аналогично найдем вероятность того, что две дополнительные карты окажутся черными:

$$\frac{C_{n-15+k}^2}{C_{2n-15}^2}=\frac{(n-15+k)(n-16+k)}{2C_{2n-15}^2}=\frac{1}{2C_{2n-15}^2}k^2+ck+d,$$

где c и d не зависят от k.

Значит, разность вероятностей выигрыша и проигрыша Вали равна

$$\Delta_k = (a-c)k + (b-d),$$

то есть числа Δ_k образуют арифметическую прогрессию, причем $\Delta_5 = \alpha$ и $\Delta_{10} = -\alpha$. Разность прогрессии равна $\dfrac{\Delta_{10} - \Delta_5}{5} = -0,4\alpha$. Следовательно, $\Delta_{11} = -\alpha - 0,4\alpha = -1,4\alpha$.

4. Ареал обитания (рек. от 7 класса, 2 балла). Пять озер в долине Пяти Озер соединены мелкими протоками. В озерах водится крупная и ценная рыба – золотистый губошлеп. Молодые губошлепы появляются из икры на свет только в озере Долгом. Каждый годовалый губошлеп перебирается по случайной протоке в соседнее озеро независимо от других рыб. Через год подросший губошлеп еще раз мигрирует в соседнее озеро. И опять он выбирает случайную протоку независимо от других. Таким образом, каждый молодой губошлеп совершает ровно два путешествия, но потом вырастает и больше уже не мигрирует, поскольку протоки слишком мелкие для взрослого золотистого губошлепа.

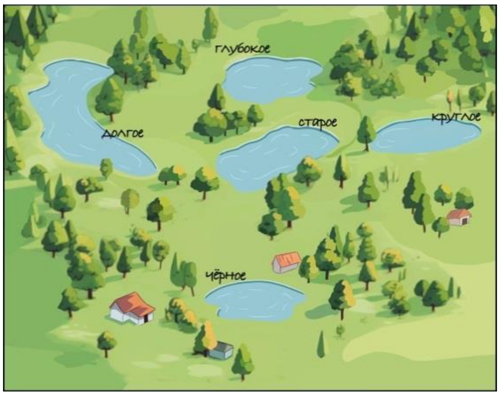

Рис. 1. План долины

Рассеянный Ученый провел исследование и совершенно точно выяснил, что примерно половина взрослых губошлепов живет в озере Круглом, треть – в Долгом, а остальные – в Старом. В Глубоком и в Черном озерах взрослые особи не встречаются.

На рисунке показан план долины со всеми пятью озерами. С помощью графа покажите, как могут быть связаны протоками озера между собой.

Пример подходящего графа показан на рис. 2.

Решение. В графе должны быть пути длины 2 из оз. Долгое в оз. Круглое и в оз. Старое. Напротив, ни в оз. Черное, ни в оз. Глубокое нельзя попасть из Долгого путем длины 2. Предположим, что из Долгого в Старое и Круглое есть пути длины 2, проходящие через Глубокое или Черное. Осталось подобрать степени вершин так, чтобы в Долгое возвращалась примерно треть рыб, а в Круглое попадала примерно половина. Пример такого графа показан на рисунке. Решение не единственное.

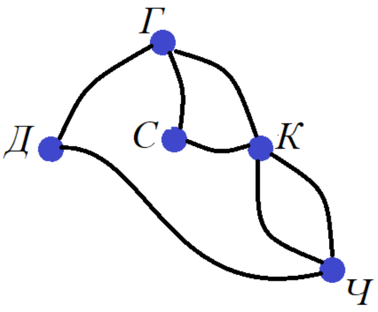

Рис. 2

5. Рейтинг пассажира (рек. от 7 класса, 2 балла). В сервисе такси «Ракета» рейтинг пассажира вычисляется как среднее арифметическое числа звезд, поставленных водителями пассажиру за несколько предыдущих поездок, Более ранние поездки не учитываются. Водитель может поставить пассажиру от 1 до 5 звезд. Рейтинг не округляется.

Ксения – курьер, и она регулярно пользуется такси «Ракета». До некоторых пор ее рейтинг был равен пяти. Однажды после поездки ее рейтинг снизился сразу до 4,94. Ксения очень расстроилась. Это было особенно неприятно, поскольку случилось в ее день рождения 15 ноября. Сможет ли Ксения, будучи предельно аккуратной, вежливой и пунктуальной пассажиркой, поднять свой рейтинг до наступления Нового года, если будет ездить на такси один раз каждый день?

Ответ: нет.

Решение. Обозначим n число поездок, которые учитываются при составлении рейтинга. Падение рейтинга равно 0,06. Пусть недовольный водитель поставил Ксении a звезд. Получаем уравнение

$$\frac{5-a}{n}=0,06, \text{ откуда } n=\frac{50(5-a)}{3}.$$

Число $5-a$ делится на 3, откуда $a=2$. Тогда $n=50$. Чтобы поднять рейтинг, Ксении нужно, чтобы злополучная двойка оказалась «забыта», то есть нужно сделать еще по крайней мере, 50 поездок. До Нового года Ксения не справится.

6. Лотерея для Буратино. Кот Базилио пригласил Буратино участвовать в беспроигрышной лотерее. Буратино ставит на кон 30 золотых. Столько же ставит лиса Алиса, которая притворяется участницей, а на самом деле в сговоре с котом. После этого Алиса и Буратино по очереди бросают симметричный игральный кубик. Если у Алисы выпало a очков, у Буратино – b очков, то сумма, стоящая на кону, делится в отношении $a:b:|a-b|$. Алиса получает a частей, Буратино получает b частей, а $|a-b|$ частей получает Базилио как организатор лотереи.
а) **(рек. от 7 класса, 2 балла).** Стоит ли Буратино соглашаться играть на таких условиях?
б) **(рек. от 9 класса, 2 балла).** Найдите математическое ожидание выигрыша Буратино.

Ответ: а) нет; б) 23,75 золотых.

Решение

а) Если $a\le b$, то доля Буратино равна $\frac{b}{a+b+b-a}=\frac{1}{2}$, то есть он останется при своих. Если же $a>b$, то доля Буратино равна $\frac{b}{a+b+a-b}=\frac{b}{2a}<\frac{1}{2}$, то есть Буратино получит меньше, чем ставил на кон. Значит, как бы ему ни везло, Буратино не сможет получить больше денег, чем вложил в игру. На такую лотерею соглашаться не надо.

б) Построим таблицу, в которой по вертикали указано число очков, выпавших у Алисы, по горизонтали – число очков, выпавших у Буратино, а в ячейках – доля, доставшаяся Буратино при каждом исходе.

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
2	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
3	1/6	2/6	1/2	1/2	1/2	1/2
4	1/8	2/8	3/8	1/2	1/2	1/2
5	1/10	2/10	3/10	4/10	1/2	1/2
6	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	1/2

Сумма чисел во всех ячейках равна

$$21\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{6}+\frac{6}{8}+\frac{10}{10}+\frac{15}{12}=21\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}=\frac{57}{4}.$$

Значит, математическое ожидание выигрыша Буратино равно $\frac{57}{36\cdot 4}=\frac{19}{48}$ всей ставки или $\frac{19}{48}\cdot 60=23,75$ золотых.

7. Недостоверные данные (рек. от 7 класса, 3 балла). Получив заказ на научную статью о прошлом, настоящем и будущем народа Анчурии, Рассеянный Ученый запросил у четырех авторитетных организаций статистические данные о населении всех десяти крупных населенных пунктов Анчурии на текущий момент. Вскорости он получил четыре таблицы, которые показаны ниже. После тщательного рассмотрения Рассеянный Ученый забраковал три из них, посчитав, что они не заслуживают доверия. Восстановите возможный ход рассуждений Ученого и определите, какую из таблиц он не забраковал.

Ответ: таблицу 2.

Решение. Последние две цифры численности населения можно считать случайными, поскольку естественная погрешность измерения численности населения в городах выше, чем 100 человек. Табл. 1 удивительна тем, что в столбце «Общая численность» последние цифры ни разу не повторяются, кроме того, ни разу не повторяются последние цифры в графе «Несовершеннолетние». Вероятность такого события при случайных цифрах равна $\left(\frac{1}{10!}\right)^2<7,59\cdot 10^{-14}$. Таблица 4 тоже странная: в обеих графах в двух любых соседних строках все четыре последние цифры различны. Вероятность этого $\left(0,9\cdot 0,8^9\cdot 0,7^9\right)^2<2,37\cdot 10^{-5}$, что тоже делает это событие маловероятным при естественном формировании таблицы.

В таблицах 2 и 3 численность населения отличается друг от друга ровно на 1000. Возникает подозрение, что то ли ВАНС, то ли АССиВ украли данные один у другого. Но в табл.3, полученной от АССиВ Ученый обнаружил, что доля несовершеннолетних во всех городах равна ровно 25% с погрешностью менее одного человека, полученной в результате округления до целого. Это невероятно.

Единственная таблица, которая не носит следов искусственного воздействия – это таблица 2 от Академии Счастья.

Табл. 1. Данные НИДА[1]		
Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершен-нолетние, чел.
Коралио	152349	38088
Сан-Матео	23417	5801
Аласан	28560	7120
Альфоран	405168	101014
Солитас	112024	27912
Паленгос	45645	11535
Пуэрте-де-Кьоу	34246	8433
Аркасена	12973	3266
Оридоба	17172	1797
Исабель-Нуэва	15981	4009

Табл. 2 Данные ВАНС[2]		
Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершен-нолетние, чел.
Коралио	150842	37566
Сан-Матео	21200	5302
Аласан	27585	6904
Альфоран	406825	101319
Солитас	112372	28021
Паленгос	45408	11389
Пуэрте-де-Кьоу	34675	8557
Аркасена	14504	3568
Оридоба	19132	2300
Исабель-Нуэва	15378	3858

Табл. 3. Данные АССиВ[3]		
Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершен-нолетние, чел.
Коралио	149842	37461
Сан-Матео	20200	5050
Аласан	26585	6646
Альфоран	405825	101456
Солитас	111372	27843
Паленгос	44408	11102
Пуэрте-де-Кьоу	33675	8419
Аркасена	13504	3376
Оридоба	18132	4533
Исабель-Нуэва	14378	3595

Табл. 4 Данные НБСИ[4]		
Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершен-нолетние, чел.
Коралио	154834	38633
Сан-Матео	22157	5540
Аласан	27628	6932
Альфоран	404051	101074
Солитас	113872	28263
Паленгос	46636	11628
Пуэрте-де-Кьоу	36251	9003
Аркасена	11420	2841
Оридоба	15975	1458
Исабель-Нуэва	15168	3867

[1] Национальный институт демографии Анчурии
[2] Всеанчурийская Академия Народного Счастья
[3] Анчурийская служба статистики и вероятности
[4] Независимое бюро социологических исследований им. президента Оливарры

8. Беллинг. Трое беллингистов – Акира, Бидзо и Цунаки – борются в круге, пихая друг друга животами. Цель – выпихнуть из круга всех соперников. Последний, кто остался в круге, тот и победил. В беллинге вероятности победы участников относятся так же, как массы их животов, сколько бы борцов ни участвовало в схватке. Перед началом соревнований оглашаются результаты взвешивания животов всех спортсменов.

После взвешивания хитрый Акира отвел Бидзо в сторону и тихо сказал:

– Давай объединим усилия против этого толстяка Цунаки. Сначала мы выпихнем его суммарной массой наших животов, а затем уже честно сразимся между собой.

Ничего не подозревающий Цунаки подошел к ним и предложил:

– Чем бессмысленно толкаться втроем, давайте выберем честным жребием двоих, пусть сначала пихаются они, а третий будет бороться с победителем.

– Я категорически возражаю! – закричал Акира. Он возражал всегда и всем.

– Хорошо, тогда я ставлю вопрос на голосование, – рассудительно заявил Цунаки. – Я за, Акира против, и теперь все зависит от решения Бидзо.

Вообще-то Бидзо не очень склонен менять правила или вступать в подлые сговоры, но готов на все, если это сулит ему выгоду, то есть больше шансов на победу.

а) **(рек. от 8 класса, 1 балл).** Соглашаться ли ему с Акирой?

б) **(рек. от 8 класса, 3 балла).** Голосовать ли за предложение Цунаки, если он не примет предложение Акиры?

Ответ: а) не соглашаться; б) голосовать за, только если живот Бидзо тяжелее полусуммы животов соперников.

Решение. а) Обозначим массы животов Акиры, Бидзо и Цунаки буквами a, b и c соответственно. Бидзо должен решить, когда вероятность его победы больше – в коалиции с Акирой или без нее.

При честном толкании вероятность победы Бидзо равна $p = b/(a+b+c)$. В сговоре с Акирой вероятность победы Бидзо станет равна

$$\frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{b}{a+b+c}.$$

Вероятность победы Бидзо в коалиции с Акирой такая же, как и без коалиции, поэтому соглашаться не нужно.

б) Если изменить правила, как предлагает Цунаки, то равновозможны три варианта.

1) Сперва состоится поединок между Бидзо и Акирой, а затем победитель будет пихаться с Цунаки. В этом случае вероятность победы Бидзо равна

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{b+c} = \frac{b^2}{(a+b)(b+c)}.$$

2) Сначала будет схватка между Бидзо и Цунаки, а затем Акира будет толкаться с победителем. В этом случае вероятность победы Бидзо такая же:

$$\frac{b^2}{(b+c)(a+b)}.$$

3) Первыми на ринг выходят Акира и Цунаки, а победитель встречается с Бидзо, у которого в этом случае шансы на победу равны

$$\frac{ab}{(a+c)(a+b)}+\frac{cb}{(a+c)(b+c)}.$$

Значит, полная вероятность победы Бидзо в случае изменения регламента равна

$$q=\frac{2b^2}{3(a+b)(b+c)}+\frac{1}{3}\left(\frac{ab}{(a+c)(a+b)}+\frac{cb}{(a+c)(b+c)}\right)=\frac{b(3ab+3bc+2ac)}{3(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Сравним эту вероятность с вероятностью $\frac{b}{a+b+c}$. Запишем разность:

$$q-p=\frac{b(3ab+3bc+2ac)}{3(a+b)(a+c)(b+c)}-\frac{b}{a+b+c}=\frac{b\big((3ab+3bc+2ac)(a+b+c)-3(a+b)(a+c)(b+c)\big)}{3(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c)}.$$

Знаменатель положителен. Упростим числитель:

$$b\left(3a^2b+3ab^2+3abc+3abc+3b^2c+3bc^2+2a^2c+2abc+2ac^2\right)-$$

$$-3b\left(a^2b+a^2c+abc+ac^2+ab^2+abc+b^2c+bc^2\right)=abc(2b-a-c).$$

Разность $q-p$ положительна, только если $b>\frac{a+c}{2}$. Таким образом, Бидзо должен голосовать за изменение регламента, только если его живот тяжелее, чем средний вес животов соперников.

9. Теннис. Коля и Валя играют в настольный теннис до трех побед: тот, кто победил три раза (не обязательно подряд), тот и выиграл весь турнир. Они играют одинаково хорошо: с вероятностью 1/2 выигрывает Коля, а с вероятностью 1/2 – Валя. Ничьих в настольном теннисе не бывает.

а) (рек. от 8 класса, 2 балла). Что вероятнее: что последняя партия окажется пятой по счету или четвертой по счету?

б) (рек. от 9 класса, 2 балла). Найдите математическое ожидание числа сыгранных партий.

Ответ: а) вероятности равны; б) 4,125.

Решение. а) Пятая партия может быть последней, только если четыре предыдущие окончились со счетом 2:2. Вероятность этого $6\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{3}{8}$. Четвертая партия может быть последней, только если три предыдущие партии окончились со счетом 2:1 или 1:2, а в четвертой победил тот, кто вел в счете. Вероятность этого $\left(3\cdot\frac{1}{2^3}+3\cdot\frac{1}{2^3}\right)\cdot\frac{1}{2}=6\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{3}{8}$.

б) Партий может быть от трех до пяти. Зная вероятности того, что случилось 4 или 5 партий, напишем распределение случайной величины X «*число сыгранных партий*»:

$$X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{E}\,X=3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{3}{8}+5\cdot\frac{3}{8}=\frac{33}{8}=4{,}125.$$

10. Наследство. (рек. от 9 класса, 2 балла). Было у отца ровно 13 быров[5] земли. Умирая, отец завещал каждому из своих трех сыновей какое-то число (целое) быров своего поля.

После смерти отца брат Тан немедленно продал свой участок соседу и переехал в город. А братья Хын и Мун засеяли свои участки кукурузой. То же самое сделал со своей частью поля сосед. Кукуруза везде взошла густо и выбросила сочные, вкусные початки.

Повадилась по ночам прилетать на поле Вещая и Вечная Птица Рю[6]. Прилетит, сядет в случайном месте и съест початок – убыток хозяину. Взлетит, покружит над полем, снова сядет, съест еще початок и улетит.

Известно, что математическое ожидание числа братьев, несущих убытки в результате каждого ночного налета, равно ровно 1. Сколько быров завещал отец брату Тану?

Ответ: 4.

Решение. а) Предположим, что Хыну, Муну и Тану отец завещал x, y и z быров. Пусть $y+z=a$ и $x+z=b$. Введем индикаторы I_1 и I_2 событий A_1 «*не пострадает Хын*» и A_2 «*не пострадает Мун*».

$$\mathrm{E}I_1=\mathrm{P}(A_1)=\left(\frac{a}{13}\right)^2 \text{ и } \mathrm{E}I_2=\mathrm{P}(A_2)=\left(\frac{b}{13}\right)^2.$$

Математическое ожидание числа непострадавших братьев также равно 1, поэтому

$$\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2=\mathrm{E}(I_1+I_2)=1, \text{ то есть } \frac{a^2}{13^2}+\frac{b^2}{13^2}=1, \text{ откуда } a^2+b^2=13^2.$$

Этому уравнению удовлетворяют числа 5 и 12; других натуральных решений нет. Следовательно, Тану отец завещал $z=a+b-13=5+12-13=4$ быра.

11. Два орла подряд (рек. от 9 класса, 2 балла). Монету бросают до тех пор, пока не выпадут два орла подряд. Сколько для этого потребуется в среднем бросков?

Ответ: 6.

Решение. Обозначим число бросков буквой X. Чтобы дождаться первого орла, нужно в среднем 2 броска, после этого с вероятностью 1/2 выпадает орел, и мы дождались своего. С вероятностью 1/2 выпадет решка, на это потрачен один бросок, и требуется еще Y бросков, причем случайные величины X и Y имеют одно и то же распределение. Поэтому

$$X=2+I+(1-I)(1+Y)=3+Y\cdot(1-I),$$

где $I=1$, если сразу после первого орла выпадет опять орел, и $I=0$, если выпадет решка. Случайная величина I относится к броску, последовавшему за первым орлом, а случайная величина Y – ко всем последующим, но не к этому. Поэтому случайные величины I и Y независимы. Следовательно, переходя к математическим ожиданиям в полученном равенстве, получаем:

$$\mathrm{E}X=3+\mathrm{E}Y\cdot(1-\mathrm{E}I).$$

[5] Быр – мера площади в той счастливой стране, где живут Хын, Мун и Тан.

[6] Про Вещую и Вечную Птицу Рю известно лишь, что она любит кукурузу, прилетает когда придется и садится куда попало без всякой связи с предшествующими событиями: никакая точка поля не является для нее более предпочтительной, чем любая другая.

Очевидно, $\mathrm{E}I = \frac{1}{2}$. Обозначим буквой x математическое ожидание величин X и Y. Тогда

$$x = 3 + \frac{1}{2}x, \text{ откуда } x = 6.$$

12. Случайные ладьи (рек. от 9 класса, 3 балла). На шахматную доску на 8 случайных полей поставили 8 ладей. Найдите математическое ожидание числа ладей, которые находятся под боем хотя бы одной другой ладьи.

Решение. Предположим, что всего ладей n. Рассмотрим какую-нибудь ладью и присвоим ей номер 1. Пусть событие A_1 состоит в том, что ладья 1 не находится под боем. Если $n > 50$, то $\mathrm{P}(A_1) = 0$. Если $2 \le n \le 50$, то нужно, чтобы все прочие ладьи попали в область, в которой нет полей, расположенных на одной вертикали или горизонтали с ладьей 1. Эта область состоит из 49 полей. Поэтому вероятность такого события равна

$$P(A_1) = \underbrace{\frac{49}{63} \cdot \frac{48}{62} \cdot \frac{47}{61} \cdot \ldots \cdot \frac{(51-n)}{(65-n)}}_{n-1 \text{ множитель}} = \frac{49! \cdot (64-n)!}{63! \cdot (50-n)!}.$$

То же самое верно для событий $A_2, \ldots, A_n$, связанных с прочими ладьями. Введем индикаторы $I_1, \ldots, I_n$ противоположных событий:

$$I_j = \begin{cases} 1, \text{ если ладья j находится под боем,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\mathrm{E}I_j = \mathrm{P}(\bar{A}_j) = 1 - P(A_j) = 1 - \frac{49! \cdot (64-n)!}{63! \cdot (50-n)!}.$$

Случайная величина X «*количество ладей, находящихся под боем*» равна сумме индикаторов. Переходя в этой сумме к математическим ожиданиям, получаем:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + \ldots + \mathrm{E}I_n = n\left(1 - \frac{49! \cdot (64-n)!}{63! \cdot (50-n)!}\right) = n\left(1 - \frac{C_{49}^{n-1}}{C_{63}^{n-1}}\right).$$

При $n = 8$ получается

$$\mathrm{E}X = 8\left(1 - \frac{C_{49}^{7}}{C_{63}^{7}}\right) \approx 6{,}76.$$

Ответ: прибл. 6,76.

13. Бал (рек. от 9 класса, 4 балла) На бал пришли 10 кавалеров и 10 дам, не знакомых друг с другом прежде. Как только объявили первый танец, все десять кавалеров в случайном порядке начали приглашать симпатичных им дам. При условии взаимной симпатии дамы отвечали согласием. Взаимные симпатии в каждой паре кавалер-дама образуются с вероятностью p случайно и независимо друг от друга.

Найдите вероятность того, что танцевать будут все и никто не останется без партнера.

Решение. Обозначим p_n вероятность события «*танцующих пар будет* n», если на балу n кавалеров и столько же дам.

Рассмотрим кавалеров в том порядке, в котором они решают делать (или не делать) приглашения дамам. Первый кавалер останется без дамы, если ни с кем из них у него нет взаимной симпатии. Вероятность этого q^n. В противном случае (вероятность $1-q^n$) первый кавалер уводит на танец одну из дам, остается $n-1$ кавалеров и $n-1$ дам, и они образуют еще $n-1$ пару с вероятностью p_{n-1}. Получаем:

$$p_n = \left(1-q^n\right) p_{n-1}.$$

Продолжим это равенство, каждый раз уменьшая индекс на единицу до тех пор, пока не дойдем в правой части до $p_0(0,0)=1$:

$$p_n(n,n)=\left(1-q^n\right)\left(1-q^{n-1}\right)p_{n-2}=\left(1-q^n\right)\left(1-q^{n-1}\right)\left(1-q^{n-2}\right)p_{n-3}=\ldots$$
$$\ldots=\left(1-q^n\right)\left(1-q^{n-1}\right)\cdot\ldots\cdot(1-q)\,p_0=\left(1-q^n\right)\left(1-q^{n-1}\right)\cdot\ldots\cdot(1-q).$$

При $n=10$ получаем: $p_{10}(10,10)=\left(1-q^{10}\right)\left(1-q^9\right)\cdot\ldots\cdot(1-q)$.

Ответ: $\left(1-q^{10}\right)\left(1-q^9\right)\cdot\ldots\cdot(1-q)$.

14. Коллекция (рек. от 9 класса, 7 баллов). Рассеянный Ученый коллекционирует эксклюзивные авторучки в футлярах. Иногда он сам покупает красивую ручку в футляре, иногда дарят коллеги по работе. Обрадованный Ученый тут же достает всю коллекцию, вынимает все ручки из футляров и вспоминает, при каких обстоятельствах в его коллекцию попала каждая ручка. Затем он снова убирает ручки в футляры, но поскольку не помнит, какая ручка где лежала, рассовывает он их в совершенно случайном порядке.

Прошлый раз Ученый доставал и рассматривал свое собрание ручек в прошлое воскресенье, а сегодня ему подарили новую ручку, он опять пополнил коллекцию и снова перепутал все ручки.

а) Докажите, что вероятность того, что сейчас ровно одна ручка лежит в своем футляре, равна вероятности того, что в прошлое воскресенье ни одна из ручек не оказалась в своем футляре.

б) Обозначим q_n вероятность того, что в коллекции из $n>3$ случайно разложенных по футлярам ручек ни одна не оказалась в своем футляре. Докажите, что

$$q_n = \frac{n-1}{n} q_{n-2} + \frac{1}{n} q_{n-3}.$$

Решение. Пронумеруем ручки и соответствующие им футляры числами от 1 до n. Тогда в результате перепутывания ручек получается *случайная перестановка*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n-1} & s_n \end{pmatrix}.$$

Здесь верхняя строчка – номера ручек, а нижняя – номера футляров от 1 до n в случайном порядке. Например, если ручек 3, то перестановка может выглядеть так

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Всего различных перестановок длины n ровно $n!$. Если k-я ручка оказалась в своем футляре ($s_k=k$), то точку k будем называть *совпадением* или *неподвижной точкой* перестановки. В приведенном выше примере есть неподвижная точка 2.

Число перестановок длины n с одним совпадением обозначим P_n, а вероятность одного совпадения (единственной ручки в своем футляре) назовем p_n. Число перестановок без совпадений обозначим Q_n, а вероятность отсутствия совпадений назовем q_n в соответствии с условием в п. б) задачи. В силу случайности перестановки

$$q_n = \frac{Q_n}{n!} \text{ и } p_n = \frac{P_n}{n!}.$$

а) Нужно доказать, что $p_n = q_{n-1}$. Рассмотрим все перестановки порядка n с единственной неподвижной точкой 1. Такая перестановка выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_n \end{pmatrix},$$

причем $s_k \neq k$ при $k = 2, \dots, n$. Пунктирной линией мы отделили совпадение от прочих элементов. Таких перестановок ровно столько, сколько перестановок порядка $n-1$ без совпадений, то есть Q_{n-1}.

Существует ровно столько же перестановок порядка n с единственной неподвижной точкой 2, столько же с единственной неподвижной точкой 3 и т.д. Таким образом, общее число перестановок порядка n с единственным совпадением равно, с одной стороны, равно $P_n = n!\,p_n$, с другой стороны, это же число равно $n \cdot Q_{n-1} = n!\,q_{n-1}$. Отсюда следует утверждение.

б) Доказательство. Рассмотрим перестановки без совпадений. Пусть, для определенности, $s_1 = 2$. Получается перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

1) Рассмотрим случай $s_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & s_3 & s_4 & \dots & s_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Совпадений не будет, если перестановка

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & \dots & n \\ s_3 & s_4 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

длины $n-2$ не имеет неподвижных точек. Таким образом, перестановок без совпадений вида (2) ровно Q_{n-2}.

2) Рассмотрим случай $s_2 \neq 1$. Предположим, единица попадает на позицию $k > 2$: $s_k = 1$. Получается перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ 2 & s_2 & s_3 & \dots & 1 & \dots & s_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Выкинем первый столбец и столбец $\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$, а вместо столбца $\begin{pmatrix} 2 \\ s_2 \end{pmatrix}$ поставим столбец $\begin{pmatrix} k \\ s_2 \end{pmatrix}$. Получится перестановка

$$\begin{pmatrix} k & 3 & 4 & \ldots & k-1 & k+1 & \ldots & n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{k-1} & s_{k+1} & \ldots & s_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

длины $n-2$. Чтобы исходная перестановка не имела совпадений, перестановка (4) должна либо не иметь совпадений вовсе, либо иметь единственное совпадение $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$. Перестановок без совпадений Q_{n-2}, а перестановок с единственным совпадением $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ столько же, сколько перестановок длины $n-3$ без совпадений, то есть Q_{n-3}.

Число k – любое от 3 до n, таким образом, мы получаем, что общее число перестановок порядка n без совпадений вида (3) равно

$$(n-2)\left(Q_{n-2}+Q_{n-3}\right).$$

Вспоминая случай 1, где $s_2=1$, добавим еще Q_{n-2} перестановок без совпадений вида (2) и найдем, что общее число перестановок без совпадений, где $s_1=2$, равно

$$Q_{n-2}+(n-2)\left(Q_{n-2}+Q_{n-3}\right)=(n-1)Q_{n-2}+(n-2)Q_{n-3}.$$

Столько же перестановок без совпадений при $s_1=3$, при $s_1=4$ и т.д. Поэтому общее число перестановок порядка n без совпадений равно

$$Q_n=(n-1)^2 Q_{n-2}+(n-1)(n-2)Q_{n-3}.$$

Чтобы перейти к вероятностям, разделим обе части этого равенства на $n!$:

$$q_n=\frac{(n-1)^2}{n!}Q_{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{n!}Q_{n-3}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{Q_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{1}{n}\frac{Q_{n-3}}{(n-3)!}=\frac{n-1}{n}q_{n-2}+\frac{1}{n}q_{n-3}. \square$$

15. Мешок конфет (рек. от 10 класса, 5 баллов). Средняя масса конфеты белого шоколада и средняя масса конфеты темного шоколада в точности совпадают. Конфеты темного шоколада очень похожи друг на друга, но немного отличаются по весу, зато все конфеты белого шоколада весят совершенно одинаково.

В мешке ровно 100 кг конфет темного шоколада. В другом таком же мешке ровно 100 кг конфет белого шоколада. В каком мешке больше конфет? Сравните математические ожидания количества конфет в первом мешке и во втором.

Ответ: в первом.

Решение. Пусть в первом мешке X темных конфет. Средняя масса конфеты в первом мешке равна $\frac{100000}{X}$ граммов, поэтому масса одной белой конфеты равна

$$\mathrm{E}\frac{100000}{X} = 100000 \cdot \mathrm{E}\frac{1}{X} \text{ (г).}$$

Стало быть, во втором мешке ровно $\dfrac{100000}{100000\mathrm{E}(1/X)} = \dfrac{1}{\mathrm{E}(1/X)}$ конфет. Значит, нужно сравнить числа $\mathrm{E}X$ и $\dfrac{1}{\mathrm{E}(1/X)}$. Это можно сделать разными способами. Вот один из них.

Запишем ковариацию величин X и $\dfrac{1}{X}$:

$$\operatorname{cov}\left(X, \frac{1}{X}\right) = \mathrm{E}\left(X \cdot \frac{1}{X}\right) - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}\frac{1}{X} = 1 - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}\frac{1}{X}.$$

Чем больше число X, тем меньше число $\dfrac{1}{X}$, поэтому ковариация отрицательна. Значит,

$$1 - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}\frac{1}{X} < 0, \text{ откуда } \mathrm{E}X > \frac{1}{\mathrm{E}(1/X)}.$$

Это значит, что в первом мешке конфет в среднем больше.

Комментарий. Утверждение $\mathrm{E}X > \dfrac{1}{\mathrm{E}(1/X)}$, а точнее эквивалентное неравенство $\dfrac{1}{\mathrm{E}X} < \mathrm{E}\dfrac{1}{X}$ верно для любой положительной непостоянной случайной величины и является частным случаем более общего факта: если функция $y = f(x)$ на некотором промежутке *выпукла* (т.е. часть плоскости над ее графиком – выпуклая фигура), то какова бы ни была случайная величина X, значения которой принадлежат этому промежутку, верно неравенство

$$f(\mathrm{E}X) \le \mathrm{E}f(X).$$

Равенство достигается в двух тривиальных случаях: функция f линейна или случайная величина X является константой. Это неравенство называется неравенством Йенсена[7].

16. Дробная часть (рек. от 11 класса, 5 баллов). Пусть k и n – произвольные натуральные числа. Из промежутка $(0; n^k)$ выбирают случайное действительное число X и рассматривают случайную величину $Y = \left\{\dfrac{n}{\sqrt[k]{X}}\right\}$. Фигурными скобками обозначена дробная часть числа. Докажите, что $\mathrm{E}Y < \dfrac{1}{2}$.

Доказательство. График функции $f(x) = \left\{\dfrac{n}{\sqrt[k]{x}}\right\}$ получается из графика функции $y = \dfrac{n}{\sqrt[k]{x}}$ опусканием каждой дуги, лежащей в полосе $m \le y < m+1$, правым концом на ось абсцисс (здесь $m = 1, 2, 3, \ldots$). Абсциссы левых концов этих дуг равны $\left(\dfrac{n}{m+1}\right)^k$. Ордината левого конца каждой дуги равна 1. На рисунке 3 изображен график функции $y = \left\{\dfrac{n}{\sqrt[k]{x}}\right\}$ при $x \ge \left(\dfrac{n}{5}\right)^k$, то есть для

[7] Иоган Людвиг Виллиам Вальдемар Йенсен (1859 – 1925) – датский математик.

$m \le 4$; по этому же правилу график продолжается влево, образуя все более крутые «зубцы» по мере приближения к $x = 0$.

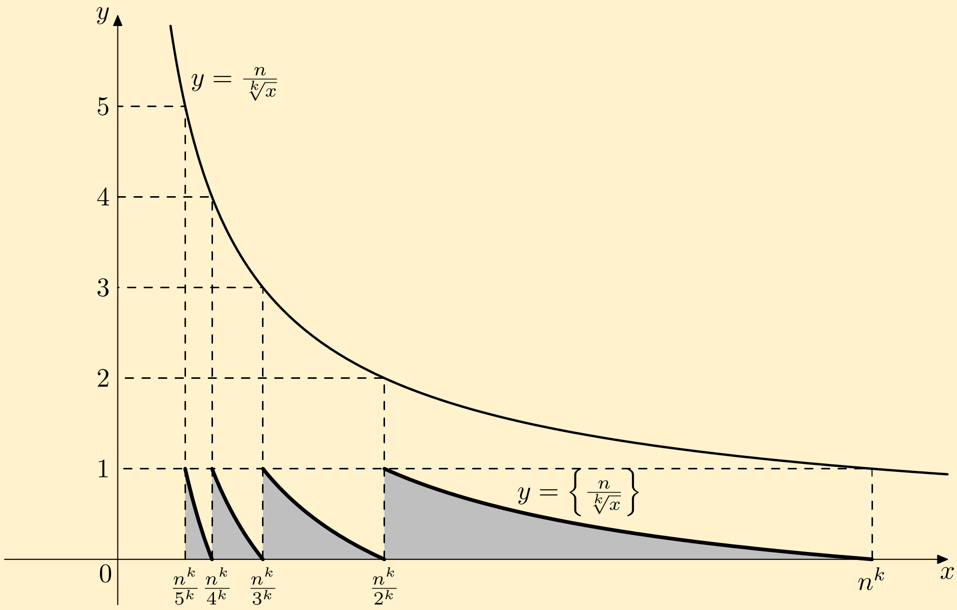

Рис. 3

$\mathrm{E}Y = \frac{1}{n^k}\int\limits_0^{n^k}\left\{\frac{n}{\sqrt[k]{x}}\right\}dx = \frac{S}{n^k}$, где S – площадь закрашенной фигуры, образованной зубцами. Площадь каждого такого зубца меньше площади прямоугольного треугольника, полученного «выпрямлением гипотенузы», а сумма площадей всех прямоугольных треугольников равна площади треугольника со стороной n^k и высотой 1. Поэтому $S < \frac{1}{2}\cdot n^k$, откуда

$$\mathrm{E}Y < \frac{1}{n^k}\cdot\frac{n^k}{2} = \frac{1}{2}. \ \square$$