Занятия 9 и 10

I. Характеристики дискретных распределений

1. Случайная величина X имеет математическое ожидание и дисперсию и задана бесконечным распределением

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}.$$

Пусть $f_X(z) = \mathrm{E}\,e^{Xz} = \sum_k p_k e^{kz}$ — производящая экспоненциальная функция моментов. Покажите, что а) $\mathrm{E}\,X = f'(0)$; б) $\mathrm{D}\,X = f''(0) - \mathrm{E}^2\,X$.

2. Случайная величина X имеет математическое ожидание $\mathrm{E}\,X$ и дисперсию $\mathrm{D}\,X$ и представляется в виде конечной или счетной суммы *зависимых* бинарных величин I_k: $X = \sum_k I_k$. Докажите: $\mathrm{D}\,X = \mathrm{E}\,X + 2\sum_{k<m} \mathrm{E}(I_k I_m) - \mathrm{E}^2\,X$.

3. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей геометрическое распределение $G(p)$.

Совет. Можно воспользоваться производящей функцией моментов. Если пользоваться индикаторами, то удобно взять индикаторы событий «k-е испытание окончилось неудачей» в интерпретации X как числа испытаний до первого успеха.

4. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей биномиальное распределение $Bi(n, p)$.

Совет. Удобно воспользоваться производящей функцией или индикаторами, которые оказываются независимы.

5. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение $HG(K, N, n)$ (N – объем совокупности, K — число меченых объектов совокупности, n — объем выборки).
Совет. Удобно воспользоваться индикаторами, как в задаче 4, но они в этом случае не будут независимы.

6. В зрительном зале театра в ряду n кресел, но проход ко всем этим креслам только с одной стороны. Если некто занял свое место, а затем другому зрителю нужно пройти дальше, то первому придётся встать. Считая, что все n зрителей, имеющих билеты на эти места, приходят в случайном порядке, найдите математическое ожидание случайной величины:
а) «Число вставаний, необходимых для того, чтобы все заняли свои места»;
б) «Количество зрителей, которым не придется вставать ни разу».

7. По очень длинной и очень узкой дороге друг за другом двигаются n автомобилей. Каждый водитель хочет ехать со своей скоростью (совершенно одинаковых двух нет), но, если он догоняет впереди идущего, то вынужден снизить скорость и ехать за ним, поскольку обгон невозможен. Через некоторое время все автомобили разобьются на группы. Найдите математическое ожидание и число таких групп.

8. В каждом Киндер-сюрпризе с равными шансами может встретиться одна из шести принцесс. Соня решила во что бы то ни стало собрать всю коллекцию. Сколько ей придется купить шоколадных яиц? Найдите математическое ожидание и дисперсию этой величины.

II. Непрерывные случайные величины

9. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<2,\\ (x-2)^2, \text{ если } 2\le x<3,\\ 1, \text{ если } x\ge 3.\end{cases}$$

а) Найдите вероятность события $\xi\le 2{,}5$.

б) Найдите вероятность события $2{,}1<\xi\le 2{,}6$.

в) Является ли случайная величина ξ абсолютно непрерывной? Если да, напишите функцию плотности для этой случайной величины.

10. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<2,\\ (x-2)^2, \text{ если } 2\le x<3,\\ 1, \text{ если } x\ge 3.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание величины ξ.

11. Распределение случайной величины ξ задано плотностью: $p(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

а) Найдите функцию распределения F_{ξ}.

б) Найдите вероятность события $0\le\xi\le\ln 3$.

III. Равномерное, показательное и нормальное распределение

12. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $(a;b)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13. Случайные величины X_1, X_2 независимы и подчиняются равномерному распределению $U(0;1)$.

а) Найдите $\mathrm{E}\min(X_1, X_2)$ и $\mathrm{E}\max(X_1, X_2)$.

б) Найдите $\mathrm{E}(|X_1 - X_2|)$.

в) Обобщите задачу на случай многих независимых стандартных равномерных величин.

14. Билли Бонс просит подаяние. В конце каждого рабочего дня он отправляется в банк и меняет полученную мелочь на купюры по 10 тысяч, 5 тысяч и по тысяче пиастров, на сколько хватает выручки. Оставшиеся пиастры Бонс ссыпает в бочку в подвале своего гаража. Оцените сумму, на которую выросла «капитализация» бочки за 10 рабочих дней.

а) Сделайте точечную оценку с помощью математического ожидания;

б) Сделайте интервальную оценку с помощью интервала шириной три стандартных отклонения и с серединой в математическом ожидании.

15. Предположим, что срок службы светодиодной лампы имеет показательное распределение с параметром «средний срок службы» $\theta = 20000$ часов.

а) Оцените долю лампочек, которые не испортятся до этого срока.

б) К какому сроку примерно половина лампочек выйдет из строя?

16. Найдите медиану случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром θ. Сравните найденную медиану с математическим ожиданием.

17. В дежурной части два телефона. Первый звонит в среднем через каждые 5 минут, второй – в среднем через каждые 10. Рассмотрим случайную величину T «среднее время ожидания звонка в дежурной части, начиная с произвольного момента». Найдите распределение случайной величины T.

18. Случайная величина X имеет распределение $N(\mu;\sigma^2)$. Найдите вероятность события:

а) $\mu < X < \mu + \sigma$; б) $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$;

в) $\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma$; г) $\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma$.

19. Как всем известно, рост взрослого ирландского эльфа[1] подчиняется распределению, близкому к нормальному со средним 101 см и со стандартным отклонением 5 см. Найдите вероятность того, что первый встреченный взрослый ирландский эльф имеет рост 95 — 98 см.

---

[1]https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%81_%D0%A4%D0%B0%D1%83%D0%BB_(%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2)

20. Случайная величина X распределена по нормальному закону $N(0;1)$. Найдите ширину симметричного интервала $(-a;a)$, в который эта величина попадает с заранее заданной вероятностью 0,98.

Замечание. Для расчетов, связанных с нормальным распределением, удобно пользоваться функциями Excel:

1. $=\text{НОРМ.СТ.РАСП}(x;0)=\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $=\text{НОРМ.СТ.РАСП}(x;1)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$,

2. Их обобщениями на нормальное распределение с параметрами μ и σ^2:

$$=\text{НОРМ.РАСП}(x;\mu;\sigma;\mathit{flag}).$$

3. Обратной функцией для стандартного распределения

$$=\text{НОРМ.СТ.ОБР}(x)=a\text{, где }\int_{-\infty}^{a}\varphi(t)\,dt=x$$

4. Обобщение предыдущей функции $=\text{НОРМ.ОБР}(x;\mu;\sigma)$.