Занятия 7 и 8

I. Некоторые дискретные распределения

1. Найдите неизвестную вероятность p в распределении случайной величины:

$$\text{а) } X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & p \end{pmatrix}; \text{ б) } X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0,1 & 0,4 & p & 0,2 \end{pmatrix}.$$

2. Напишите *распределение Бернулли* индикатора события *A*:
а) «*при бросании игральной кости выпало больше двух очков*»;
б) «*стрелок промахнулся пять раз*» в опыте, где стрелок стреляет по мишени до первого попадания с вероятностью p попадания при каждом выстреле.
в) «*четвертое испытание окончилось успехом*» в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха в каждом испытании p.

3. Из ящика, в котором 8 белых и 6 черных шаров по одному в случайном порядке вытаскивают шары. Напишите распределение индикатора события «пятый шар окажется черным».

4. Случайная величина X задана распределением:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,8 & 1 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Напишите распределение случайной величины: а) $5X-3$; б) X^2.

5. Докажите, что $I^2 = I$, где I — произвольная бинарная случайная величина.

6. Две случайные величины X и Y заданы распределениями:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}, \; Y \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

а) Какие значения может принимать случайная величина $X+Y$? Можно ли найти какие-то из вероятностей этих значений?
б) Напишите распределение величины $X+Y$, зная, что X и Y независимы.

7. Протокол передачи файлов ftp:// разбивает передаваемый файл на пакеты объемом 256 байт включая контрольную сумму битов. При каждой попытке принимающее устройство проверяет совпадение контрольной суммы с суммой переданных битов. При несоответствии передача пакета повторяется. Предположим, что при некоторых условиях вероятность успешной передачи пакета равна 0,3. Напишите распределение случайной величны «число попыток», требующихся для передачи пакета.

8. Производится серия испытаний до первого успеха с вероятностью успеха p в каждом отдельном испытании. Напишите *геометрическое распределение* случайной величины X «число испытаний».

9. Канцелярскую кнопку бросают 10 раз. Вероятность выпадения ее шляпкой вниз равна 0,73. Напишите распределение случайной величины «число кнопок, упавших шляпкой вниз».

10. Производится серия из n одинаковых и независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом. Напишите *биномиальное распределение* случайной величины «число успехов».

11. Пусть X и Y – независимые случайные величины, причем, $X \sim Bi(K,p)$, а $Y \sim Bi(N-K,p)$. Какое распределение имеет случайная величина X при условии, что $X+Y=N$?

12. Из коробки, где 8 красных и 9 синих шаров, наудачу вынимают 5 шаров. Напишите распределение величины «число красных шаров среди вынутых».

13. Запишите в общем виде *гипергеометрическое распределение* с параметрами N — размер совокупности, n – число выбранных объектов, K – число меченых объектов в совокупности.

14. В некотором опыте рассмотрим два события A и B и их индикаторы I_A и I_B. Напишите индикатор события: а) $\bar{B}$; б) $A \cap B$; в) $\bar{A} \cap B$; г) $\overline{A \cap B}$.

15. В некотором опыте рассмотрим два события A и B и их индикаторы I_A и I_B.
а) Запишите индикатор события $A \cup B$.
б) выведите формулу сложения: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

16. Выведите формулу сложения вероятностей для а) 3 событий; б) n событий.

II. Математическое ожидание

17. Найдите математическое ожидание распределения Бернулли.

18. Дана случайная величина X. Найдите $\mathrm{E}\,X$:

$$\text{а) } X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \text{б) } X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

19. Найдите математическое ожидание суммы выпавших очков, если игральную кость бросают а) два раза; б) три раза; в) n раз.

20. Приведите пример какой-нибудь случайной величины, которая не имеет математического ожидания.

21. В аэропорту пассажиры ждут около багажной ленты 200 чемоданов. Среди них — Петровы, которые ждут свои четыре чемодана. Чемоданы появляются на ленте в случайном порядке. Каким по счёту следует ждать: а) первый чемодан Петровых; б) последний чемодан Петровых? Найдите математические ожидания этих величин.

22. В условиях предыдущей задачи найдите математическое ожидание числа чемоданов семьи Петровых, которые появились в первой сотне.

23. В учительской на стене доска, на ней N крючков, на каждом висит ключ от кабинета. Однажды доска сорвалась, и ключи рассыпались. Завуч повесил доску, а ключи в спешке развесил случайным образом. Найдите математическое ожидание числа ключей, которые висят на своих крючках.

24. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы и имеют математические ожидания, то $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$.

III. Дисперсия

25. Найдите дисперсию распределения Бернулли. При какой вероятности успеха дисперсия будет наибольшей?

26. Найдите дисперсию числа очков, выпавших: а) на одной кости; б) на двух костях.

27. Найдите дисперсию случайной величины «число ключей на своих крючках» из задачи 20.

28. Приведите пример какой-нибудь случайной величины, которая имеет математическое ожидание, но не имеет дисперсии.

29. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы и имеют дисперсии, то $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X \cdot \mathrm{D}Y$.