Занятия 11 и 12

I. Непрерывные случайные величины

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<2,\\ (x-2)^2, \text{если } 2\le x<3,\\ 1, \text{если } x\ge 3.\end{cases}$$

а) Найдите вероятность события $\xi\le 2{,}5$.

б) Найдите вероятность события $2{,}1<\xi\le 2{,}6$.

в) Является ли случайная величина ξ абсолютно непрерывной? Если да, напишите функцию плотности для этой случайной величины.

2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<2,\\ (x-2)^2, \text{если } 2\le x<3,\\ 1, \text{если } x\ge 3.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание величины ξ.

3. Распределение случайной величины ξ задано плотностью: $p(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

а) Найдите функцию распределения F_ξ.

б) Найдите вероятность события $0\le\xi\le\ln 3$.

II. Равномерное, показательное и нормальное распределение

4. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $(a;b)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Случайные величины X_1, X_2 независимы и подчиняются равномерному распределению $U(0;1)$.

а) Найдите $\mathrm{E}\min(X_1, X_2)$ и $\mathrm{E}\max(X_1, X_2)$.

б) Найдите $\mathrm{E}(|X_1-X_2|)$.

в) Обобщите задачу на случай многих независимых стандартных равномерных величин.

6. Билли Бонс просит подаяние. В конце каждого рабочего дня он отправляется в банк и меняет полученную мелочь на купюры по 10 тысяч, 5 тысяч и по тысяче пиастров, на сколько хватает выручки. Оставшиеся пиастры Бонс ссыпает в бочку в подвале своего гаража. Оцените сумму, на которую выросла «капитализация» бочки за 10 рабочих дней.

а) Сделайте точечную оценку с помощью математического ожидания;

б) Сделайте интервальную оценку с помощью интервала шириной три стандартных отклонения и с серединой в математическом ожидании.

7. Предположим, что срок службы светодиодной лампы имеет показательное распределение с параметром «средний срок службы» $\theta = 20000$ часов.

а) Оцените долю лампочек, которые не испортятся до этого срока.

б) К какому сроку примерно половина лампочек выйдет из строя?

8. Найдите медиану случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром θ. Сравните найденную медиану с математическим ожиданием.

9. В дежурной части два телефона. Первый звонит в среднем через каждые 5 минут, второй – в среднем через каждые 10. Рассмотрим случайную величину T «среднее время ожидания звонка в дежурной части, начиная с произвольного момента». Найдите распределение случайной величины T.

10. Случайная величина X имеет распределение $N(\mu;\sigma^2)$. Найдите вероятность события:

а) $\mu < X < \mu+\sigma$; б) $\mu-\sigma < X < \mu+\sigma$;

в) $\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma$; г) $\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma$.

11. Как всем известно, рост взрослого ирландского эльфа[1] подчиняется нормальному распределению со средним 101 см и со стандартным отклонением 5 см. Найдите вероятность того, что первый встреченный взрослый ирландский эльф имеет рост 95 — 98 см.

12. Случайная величина X распределена по нормальному закону $N(0;1)$. Найдите ширину симметричного интервала $(-a;a)$, в который эта величина попадает с заранее заданной вероятностью 0,98.

---

[1]https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%81_%D0%A4%D0%B0%D1%83%D0%BB_(%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2)

Замечание. Для расчетов, связанных с нормальным распределением, удобно пользоваться функциями Excel:

1. $= \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x;0) = \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $= \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x;1) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$,

2. Их обобщениями на нормальное распределение с параметрами μ и σ^2:

$$= \text{НОРМ.РАСП}(x;\mu;\sigma;\, flag).$$

3. Обратной функцией для стандартного распределения

$$= \text{НОРМ.СТ.ОБР}(x) = a\text{, где } \int\limits_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt = x$$

4. Обобщение предыдущей функции $= \text{НОРМ.ОБР}(x;\mu;\sigma)$.