



Симметрия и перестановки. Задачи

1. Кассир в метро заранее заготавливает стопки из монет, чтобы быстро дать сдачу. Он заготовил две одинаковые стопки по 5 монет в каждой. Какова вероятность того, что в этих стопках орлов поровну?

2. На доске у вахтера 10 крючков для ключей – № 1, № 2 и т.д. до № 10. На каждом ключе бирка с номером: № 1, № 2 и т.д. до № 10. Ключи повесили на эти 10 крючков в случайном порядке. Найдите математическое ожидание числа ключей, у которых номер на бирке больше номера, который на крючке.

3. Перестановкой порядка n называется таблица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где числа a_n это те же числа $1, 2, \dots, n$, взятые в произвольном порядке. Найдите общее число различных перестановок порядка n .

4. Десять благородных девиц пришли в театр. У них билеты на места с 1 по 10 в одном ряду. Но проход узкий, поэтому если одна девица села, а другой нужно пройти дальше, то первая встает, чтобы пропустить подругу и тут же садится. Найдите математическое ожидание числа вставаний.

5. Пусть дана перестановка порядка n . Пару $\begin{pmatrix} a \\ s(a) \end{pmatrix}$ в перестановке будем называть *избытком*, если $s(a) > a$, *недостатком*, если $s(a) < a$ и *неподвижной точкой*, если $s(a) = a$. Докажите, что:

- а) если в перестановке есть хотя бы один недостаток, то есть и избыток;
- б) перестановок, где избытков больше чем недостатков, столько же, сколько перестановок, где недостатков больше, чем избытков.

6. а) Докажите: $Q_n = n! - (1 + C_n^1 Q_1 + C_n^2 Q_2 + \dots + C_n^k Q_k + \dots + C_n^{n-1} Q_{n-1})$, где Q_k – число перестановок порядка k без неподвижных точек.

б) Пользуясь пунктом (а), получите рекуррентную формулу вероятности того, что случайно взятая перестановка порядка n не содержит неподвижных точек.

в) Найдите вероятность того, что в случайной перестановке порядка n ровно k неподвижных точек.

7. Было у отца 4 сына. Умирая, он разделил между ними наследство: младшему достался кот, следующему – мерседес, следующему – вилла, а старшему – нефтяная компания. Погоревали братья, но решили, что наследство поделено нечестно. И решили поделить его заново честным жребием. Назовем брата довольным, если в результате жребия ему досталась доля дороже, чем была. Назовем брата недовольным – если дешевле, чем была. Найдите вероятность того, что довольных братьев больше, чем недовольных.