



XVIII Заочная интернет-олимпиада МЦНМО по вероятности и статистике

*правила и регламент Заочной олимпиады
1 декабря 2024 г. — 12 января 2025 г.*

1. Участие в Заочной олимпиаде

Дорогие участники олимпиады, родители и учителя. В целях популяризации математики и, в особенности, теории вероятностей и статистики – разделов математики, наиболее близких к жизни, мы с 2008 г. проводим эту заочную олимпиаду. Заочная интернет-олимпиада содержит 19 заданий, из которых 3 задания – эссе (небольшое сочинение на заданную тему) и 16 заданий – это задачи, требующие полного решения.

Участвовать в олимпиаде может любой школьник 7-11 классов независимо от участия или неучастия в Дистанционном этапе МОШ, а для участников Дистанционного этапа МОШ это будет хорошей подготовкой к Очному этапу МОШ.

ВНИМАНИЕ!

Каждую задачу мы рекомендуем участникам, начиная с некоторого класса. Это указание – ориентир для участников; оно не является ограничением.

Любой участник может выполнять любое задание независимо от рекомендаций. Баллы начисляются в соответствии с критериями независимо от класса. Разница в возрасте учитывается при награждении и определении призеров и победителей.

2. Рассылка материалов

Все участники самостоятельно получают анкету, задания и настоящие правила на странице Заочной олимпиады [XVIII Заочная Интернет-Олимпиада по вероятности и статистике | Вероятность в школе](#) .

3. Выполнение работы

В ходе раздумий над заданиями Вы можете пользоваться любыми источниками (справочниками, учебниками, интернетом, получать консультации от учителя, от нас) по поводу теории вероятностей и статистики. Большую помощь может оказать изучение решений задач прошлых лет (см. архив на странице основного тура), посещение дистанционного кружка по теории вероятностей (<http://ptlab.mccme.ru/node/1483>). Неэтичным и попросту недопустимым является лишь прямое списывание или выполнение заданий за участника кем-то другим. Для консультаций с нами используйте, пожалуйста, форум «Консультация» на нашем сайте <http://ptlab.mccme.ru>. У Вас больше месяца. Пожалуйста, не откладывайте все на последний день, но и не спешите.

4. Отсылка решений, проверка и оценивание

Свои решения и заполненную анкету участника нужно отправить в любом текстовом или графическом формате (doc, docx, pdf, jpg, png и т. п., но не heic) на электронный адрес prob-in-school@yandex.ru до истечения суток 12 января 2025 года по московскому времени. Ответы и решения, высланные 13 января или позже, не принимаются. Ваши решения проверит оргкомитет.

Решения задач будут опубликованы на странице Заочной интернет-олимпиады 13 января. Лучшие эссе будут опубликованы по мере проверки.

5. Определение призеров и победителей, награждение

При проверке задания оцениваются разным числом баллов, в зависимости от их сложности (максимальный балл за задачу указан в условии). Единственное требование, предъявляемое к решению задачи – решение должно быть верным.

Отдельно происходит определение призеров и победителей в 7 классах, отдельно в 8–9 классах и отдельно – в 10–11. Отдельно производится оценка эссе и награждение авторов лучших эссе (независимо от возраста).

Критерии награждения оргкомитет публикует после олимпиады, исходя из результатов. Претензии по критериям награждения не принимаются.

Победители и призеры получают дипломы и грамоты. Порядок и регламент награждения будет определен оргкомитетом, и вся необходимая информация будет размещена на странице олимпиады.

6. Апелляция

Апелляция **проводится по электронной почте с 19 января по 1 февраля** включительно. Форма апелляции будет размещена на странице Заочной олимпиады. **Оргкомитет прекратит переписку по поводу апелляций после 1 февраля**, независимо от того, все ли вопросы выяснены. При наличии разногласий просим уложиться в срок.

Искренне желаем удачи

Отдельное замечание

Мы редко сталкиваемся со случаями списывания и другими недобросовестными попытками искажения результатов. Но все же бывает. Если у оргкомитета возникают сомнения в самостоятельности выполнения работы, оргкомитет вправе дисквалифицировать работу без дополнительных согласований.

Анкета участника

Заполните, пожалуйста, поля анкеты и пришлите нам эту анкету вместе со своей работой – *одним письмом*. Обязательные поля помечены символом *.

Проверка Вашей работы будет проведена при наличии заполненной анкеты.

* Участник (ФИО):

* В каком классе вы учитесь?

* Участвовали ли Вы в Дистанционном этапе II МОШ по вероятности и статистике?

* Ваш почтовый адрес (нужен в случае рассылки призов):

* Адрес электронной почты:

Телефон (по которому можно Вам позвонить):

* Публиковать ли Вашу фамилию и имя в списке победителей, если Вы станете победителем олимпиады? **Да**

Если Вы удалили «Да», то в списке вместо фамилии будет Ваш инициал. Например, *Василий К.*

Напишите, пожалуйста, свои впечатления, замечания, предложения или пожелания, чтобы мы могли учесть их в будущем:

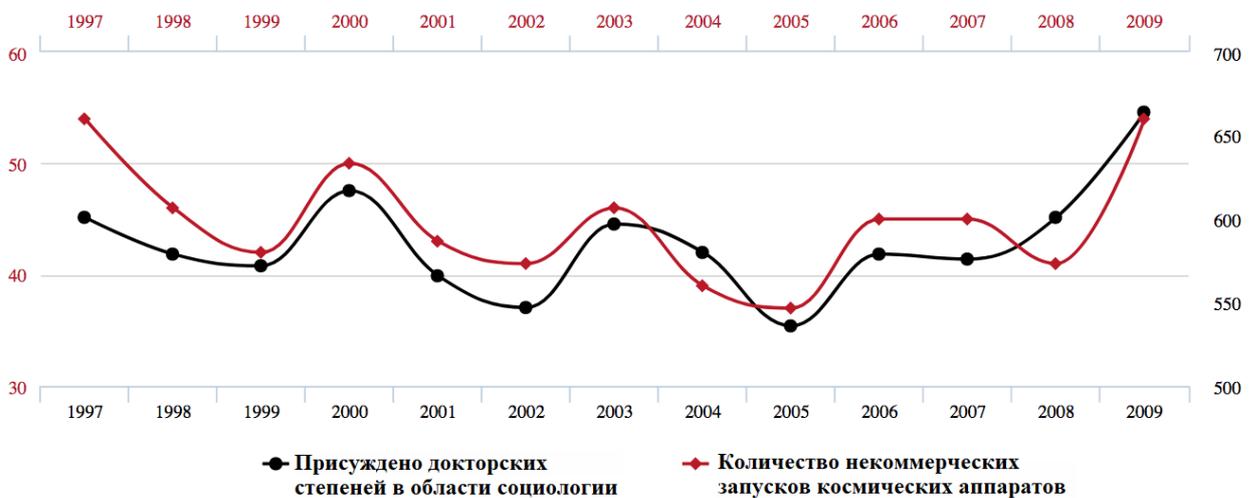
Отправляя эту анкету, вы тем самым даете согласие на обработку Ваших персональных данных в той мере, в какой это необходимо для проверки работы, составления списка участников, призеров и победителей.

Эссе

Эссе – это сочинение небольшого объема на заданную тему. В отличие от задач, эссе не подразумевает точных решений, ответов или методов, но должно быть продуманным, аргументированным, подробным.

Вы можете выбрать любое эссе, или два, или даже все три. Эссе оцениваются отдельно. Баллы за эссе не суммируются и не прибавляются к баллам, полученным за решение задач. За лучшие эссе участники награждаются отдельными дипломами.

1. Социологи в космосе. По информации источника «Spurious correlations»¹, имеется тесная статистическая связь между количеством некоммерческих запусков космических аппаратов и количеством присужденных степеней доктора наук в области социологии. По крайней мере, такая связь наблюдалась в период с 1997 по 2009 г.



Разумеется, такая связь может оказаться случайной и совершенно ни на чем не основанной. Но может быть и так, что есть какая-то причина одновременных спадов и подъемов столь различных по своей природе величин.

Иногда скрытые факторы совершенно неожиданным образом проявляются в весьма удаленных друг от друга областях. Достаточно вспомнить высокую корреляцию между количеством аистов и количеством новорожденных в Голландии в первой половине XX века. Связь казалась случайной, но дополнительные исследования показали, что обе величины обусловлены третьей – доступностью загородного жилья для зарождающегося среднего класса.

Может ли случиться, что количество докторов социологии и количество космических запусков тоже связаны между собой какой-то общей причиной?

¹ <https://tylervigen.com/spurious-correlations>

Главное качество, необходимое статистику, – фантазия. Пофантазируйте на эту тему. Вдруг вам удастся найти если не несомненное, то хотя бы правдоподобное объяснение наблюдающейся связи.

Чем убедительнее вы сможете подтвердить свои предположения математическими выкладками, тем лучше. Ведь наша олимпиада не по социологии...

2. Как устроить хороший опрос? При планировании любого статистического эксперимента требуется правильно отобрать данные. Например, при проведении социологического обследования требуется определить группу респондентов, то есть выборку тех, кто ответит на вопросы исследователей. Выборка должна быть *репрезентативной*, то есть хорошо отражающей свойства генеральной совокупности² людей, которую изучает исследователь. Лучший способ устроить репрезентативную выборку – сделать ее совершенно случайной, чтобы каждый человек из совокупности мог попасть в нее с равными шансами. Предположим, что мы хотим исследовать отношение жителей крупного города к происходящему или планируемому благоустройству городских улиц. Нас интересует мнение всех взрослых, но их очень много, они принадлежат к разным социальным слоям, отличаются по возрасту, стилю жизни, имеют разные привычки. Как устроить случайную выборку? Можно устроить опрос в метро... Но тогда шансы попасть в выборку окажутся сильно ниже у тех, кто ездит в метро редко или не ездит вовсе. Может быть, послать опросчиков в крупные торговые сети? Тогда мы не охватим тех, кто широко пользуется маркетплейсами, а не ездит на шоппинг. Звонить по случайным мобильным телефонам? Это может быть квалифицировано как телефонный спам. Но главная проблема в том, что мы практически исключим из опроса водителей общественного транспорта и других людей, которые не пользуются телефоном на работе. Звонить поздно вечером? Еще того не лучше. Как видите, проблем хватает, и поэтому социологи придумывают самые разные способы формирования репрезентативных выборок в сложных условиях.

Подумайте, как можно организовать действительно или хотя бы почти случайную выборку для опроса жителей большого города, которая пропорционально представляла бы все профессиональные, социальные и возрастные группы взрослого населения.

3. Катастрофа! Много лет назад в одном крупном российском регионе проводилось исследование качества школьного образования. Была сформирована случайная выборка из 165 школ, и восьмиклассникам предложили контрольную работу по математике. Работа оценивалась по 100-балльной шкале. В результате обработки полученной информации выяснилось следующее.

Средний балл всех участников в регионе оказался равен 42,56. Из всей выборки в 89 школах средний балл оказался ниже, а в 76 школах – выше среднего по региону.

Представитель министерства образования региона ужаснулся: больше половины школ написали ниже среднего! Это катастрофа!

К счастью, среди организаторов исследования был профессиональный статистик, который сказал... неважно, что он сказал. Подумайте над ситуацией. Правда ли «больше половины ниже среднего» – это очень плохо? О чем это может говорить? Чем эта ситуация отличается качественно от ситуации «больше половины выше среднего»?

² General – общий. Поэтому генеральная совокупность – это общая совокупность, то есть множество всех людей, которое предстоит обследовать.

Попробуйте с точки зрения статистика качественно проанализировать ситуацию на основе имеющейся скудной информации и составить убедительную справку для представителя министерства. Разумеется, справка не должна быть голословной – ведь наша олимпиада по математике, а не по красноречию.

Задачи

1. Неопытный бухгалтер. Учительница математики О. устроилась бухгалтером в фирму, в которой 500 сотрудников, получающих деньги наличными. Когда пришла пора выдавать зарплату, О. аккуратно до копейки подсчитала на компьютере зарплату каждого сотрудника. Получив в банке соответствующую сумму, О. начала выдавать зарплату. Поскольку монет меньше рубля в ходу нет, О. округляла каждую сумму до рубля по обычным правилам, которым много лет учила шестиклассников. Но в конце денег немного не хватило, и разницу О. была вынуждена компенсировать из своего кармана. О. поняла, что это случилось из-за округления, и не расстроилась, решив, что это чистая случайность, и в другой раз, напротив, небольшая сумма останется. Но и в следующие три месяца повторилась та же история.

а) (от 6 класса, 1 балл). Почему так получилось?

б) (от 6 класса, 1 балл). Как можно было округлять, чтобы такого не произошло?

в) (от 9 класса, 2 балла). Найдите математическое ожидание суммы, которую О. приходится ежемесячно доплачивать из своего кармана.

2. Уровень воды (от 6 класса, 2 балла). На уроке статистики Коля и Валя дали для обработки один и тот же большой массив, состоящий из замеров уровня воды в реке в их городе относительно многолетнего среднего уровня. Данные находились в диапазоне от -163 до 227 см. Чтобы найти средний уровень, Коля сгруппировал данные в интервалы по 5 см, а Валя – в интервалы длиной 3 см. Ни у Коли, ни у Вали пустых интервалов не было. Пользуясь серединами своих интервалов, Коля нашел среднюю глубину, и у него получилось 14 см. Валя сделала то же самое, пользуясь серединами своих интервалов, и у нее получилось 10 см. Докажите, что хотя бы один из них ошибся.

3. Премия. Директор небольшого подразделения крупной компании получил на свое подразделение месячный премиальный фонд 80 тыс. рублей. Он решил распределить деньги между сотрудниками так, чтобы в этом месяце медианная выплата (оклад плюс премия) сотрудников в его подразделении оказалась как можно выше (согласно политике компании, рейтинг директора зависит от медианного дохода его подразделения – чем выше, тем лучше).

а) (от 6 класса, 1 балл). В подразделении 11 сотрудников. Какими могут быть их оклады, если медианную выплату с учетом премии удастся увеличить на всю сумму, то есть на 80 тыс. р.? Приведите пример подходящего распределения окладов.

б) (от 7 класса, 4 балла). В таблице показаны оклады каждого из 11 сотрудников подразделения. Найдите наибольшее возможное значение медианной выплаты сотрудникам в этом месяце.

| | | | | | | |
|------------------------|----|----|----|----|-----|-----|
| Количество сотрудников | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 |
| Оклад, тыс. р. | 60 | 70 | 80 | 90 | 110 | 120 |

4. Средний балл (от 6 класса, 2 балла). В некотором регионе средний балл на ЕГЭ в каждой школе вырос, а средний балл во всем регионе снизился по сравнению с прошлым годом. Как это оказалось возможно?

5. Автобусные маршруты (от 6 класса, 3 балла). В тридевятом царстве ровно 50 городов. Они связаны между собой дорогами, причем из каждого города выходит нечетное число дорог, и из каждого города по дорогам можно добраться в любой другой. Докажите, что можно по этим дорогам пустить ровно 25 автобусных маршрутов так, что по каждой дороге будет ходить автобус только одного маршрута.



Автор А. Медведева

6. Средний квадрат разностей (от 8 класса, 3 балла). У Квантика был числовой массив из 50 чисел. Дисперсия массива равнялась 98. Ноуттик взял каждую пару чисел из массива Квантика и нашел разность этих чисел. Получился новый массив. Найдите средний квадрат чисел массива Ноуттика.



7. Девять коробок (от 8 класса, 3 балла). Перед игроком девять закрытых коробок. В трех случайных коробках призы, а шесть коробок пустые. Игрок по очереди открывает две коробки на свой выбор. Если в обеих призы, то игрок побеждает и забирает оба приза. Если это не так, открытые коробки закрывают, а игроку дается следующая попытка. При этом положение коробок и призов в них не меняется. Найдите вероятность того, что при правильной игре игрок выиграет призы не более чем с трех попыток.

Автор А. Акимов

8. Дешевые участки (от 8 класса, 4 балла). Компания «Твой гектар» продает квадратные участки земли. Каждый участок имеет площадь не меньше одного гектара (1 га равен 10000 кв. м.) и по периметру обносится забором. Средняя длина забора, огораживающего участок, оказалась равна 1000 м, а средняя площадь участка оказалась меньше, чем 10 гектаров. Могло ли получиться так, что доля участков площадью 1 га оказалась равна 65%?

9. Угадай последовательность (от 8 класса, 2 балла). На уроке теории вероятностей учитель бросает игральный кубик четыре раза. Результаты бросков видны только Коле. Затем учитель предлагает ученикам игру: побеждает тот, кто угадает последовательность выпавших чисел не более чем с одной ошибкой (одно неверное число). Игра идет втемную: никто из игроков не видит, что предлагают соперники. Судит игру Коля, поскольку только он знает выпавшую последовательность. Какова вероятность того, что из 20 учеников, принявших участие в игре, хотя бы один окажется победителем?

Автор А. Медведева

10. Два случайных выбора (от 8 класса, 2 балла). В n коробках лежат шары – в каждой коробке ровно один белый шар и какое-то количество черных, причем не во всех коробках черных шаров поровну. Можно сделать одно из двух.

1. Ссыпать все шарики в одну коробку и выбрать из нее один случайный шарик.
2. Выбрать случайную коробку и вытащить из нее случайный шарик.

При каком способе выбора вероятность получить белый шарик больше?

11. Наибольший средний квадрат (от 8 класса, 3 балла). Числовой набор состоит из 25 неотрицательных чисел, его среднее арифметическое равно 3, а медиана равна 1. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического квадратов этих чисел.

12. Нелюдимые разбойники. Всего в банде 146 разбойников. Известно, что если двое разбойников в этой банде знакомы друг с другом, то в этой же банде найдется разбойник, которого они оба не знают.

а) (от 8 класса, 2 балла). Назовем разбойника нелюдимым, если в банде найдутся хотя бы двое, кого он не знает. Может ли быть так, что в этой банде ровно двое нелюдимых разбойников?

б) (от 8 класса, 4 балла). Докажите, что в банде найдется разбойник, который не знаком хотя бы с 13 другими.

13. Волшебные фонари (от 9 класса, 2 балла). В волшебной пещере 5 волшебных фонарей. Чтобы фонарь загорелся, его нужно коснуться волшебной палочкой или хотя бы пальцем. Главное волшебство состоит в том, что фонари зажигают только в определенном, но никому не известном порядке: первый можно зажечь просто касанием, второй тоже можно зажечь касанием, но только если первый уже горит и так далее. Найдите математическое ожидание случайной величины «число касаний, которые потребуются, чтобы зажечь все фонари».



14. Большой средний угол (от 9 класса, 4 балла). На окружности равномерно и независимо выбраны три точки. Какова вероятность того, что средний по величине угол образованного ими треугольника больше чем 60° ?

Автор Б. Френкин



15. Шляпный бутик (от 9 класса, 5 баллов). В бутик, где продаются десять модных шляпок, зашли десять модниц. Каждая хочет купить себе шляпку. Каждая шляпка обладает некоторой привлекательностью, а каждая модница обладает определенной привередливостью. Привлекательности и привередливости – случайные и независимые числа из отрезка $[0;1]$.

Модница готова купить шляпку, если привлекательность этой шляпки не меньше, чем привередли-

вость модницы. В противном случае модница шляпку не купит ни за что. Какова вероятность того, что, возможно, договорившись между собой, все модницы сумеют купить по шляпке?

16. Летящий огурец (от 10 класса, 4 балла). Общество уфологов взбудоражено многочисленными сообщениями об НЛО, который выглядит, как длинный тонкий огурец, и при этом беспрестанно и беспорядочно вращается относительно продольной, поперечной и вертикальной осей. Сфотографировать объект по неизвестным причинам не удалось, однако в распоряжении уфологов оказались три отчетливых фотографии тени, которую это НЛО отбрасывало на горизонтальные поверхности. Фотографии сделаны в случайные моменты времени случайными фотографами. Уфологи совершенно точно измерили длину тени, запечатленной на каждой фотографии. Длины получились 15,8 м, 3,3 м и 12,5 м. На основании этих данных нужно сделать оценку истинной длины летающего огурца. Сделайте ее.