



## XVII Заочная интернет-олимпиада МЦНМО

### по теории вероятностей и статистике

27 ноября 2023 г. — 7 января 2024 г.

#### 1. Заочная интернет-олимпиада МЦНМО по вероятности и статистике

Дорогие участники, родители и учителя! С 2008 года мы проводим эту олимпиаду для популяризации математики, а особенно теории вероятностей и статистики. В этом году добавилась еще одна олимпиада по вероятности и статистике – Московская, которая получила 3-й уровень в перечне олимпиад Министерства просвещения. Ее результаты учитываются при поступлении в некоторые вузы.

Наша традиционная олимпиада МЦНМО в этом году проводится 17-й раз. Она не дает преимуществ при поступлении, но зато гораздо более интересная и обширная. Участникам дается срок более месяца, а присланные решения проверяет оргкомитет в МЦНМО. Олимпиада содержит 19 заданий, из которых 3 задания – эссе (небольшое сочинение на заданную тему) и 16 заданий – это задачи, требующие полного решения.

**Участвовать в Заочной интернет-олимпиаде МЦНМО может любой школьник 7-11 классов или студент СПО независимо от участия или неучастия в отборочном туре Московской олимпиады.** Для участников отборочного тура МОШ это будет хорошей подготовкой к заключительному этапу.

#### **ВНИМАНИЕ!**

**Каждую задачу мы рекомендуем участникам, начиная с некоторого класса. Это указание – ориентир, а не ограничение. Любой участник может выполнять любое задание независимо от рекомендаций. Баллы начисляются в соответствии с критериями независимо от класса. Разница в возрасте учитывается при награждении и определении призеров и победителей.**

#### 2. Рассылка материалов

Все участники самостоятельно загружают инструкцию, анкету и задания со страницы олимпиады: [XVII Заочная интернет-олимпиада по вероятности и статистике | Вероятность в школе \(mccme.ru\)](https://ptlab.mccme.ru/node/1703) (<https://ptlab.mccme.ru/node/1703>).

#### 3. Выполнение работы

В ходе раздумий над заданиями вы можете пользоваться любыми источниками (справочниками, учебниками, интернетом, рекомендациями учителя). Большую помощь может оказать изучение решений задач прошлых лет (см. архив на странице основного тура), посещение дистанционного кружка по теории вероятностей (<http://ptlab.mccme.ru/node/1483>). Неэтичным и попросту недопустимым является лишь прямое списывание или выполнение заданий за участника кем-то другим. Для консультаций с нами используйте, пожалуйста, форум «Консультация» на нашем сайте <http://ptlab.mccme.ru>. У вас больше месяца. Пожалуйста, не откладывайте работу на последний день, но и не спешите.

#### 4. Отсылка решений, проверка и оценивание

Свои решения и заполненную анкету участника нужно отправить в любом текстовом или графическом формате (doc, docx, pdf, jpg, png и т. п., но не heic) на электронный адрес [prob-in-school@yandex.ru](mailto:prob-in-school@yandex.ru) до истечения суток 7 января 2024 года по московскому времени. Ответы и решения, высланные 8 января или позже, не принимаются. Ваши решения проверит оргкомитет.

Решения задач будут опубликованы на странице олимпиады 8 января. Лучшие эссе будут опубликованы позже по мере проверки.

#### 5. Определение призеров и победителей, награждение

Задания оцениваются разным числом баллов, в зависимости от их сложности. Максимальный балл за каждую задачу указан в ее условии. Единственное требование, предъявляемое к решению задачи, – решение должно быть математически грамотным.

Отдельно происходит определение призеров и победителей в 7 классах, отдельно в 8–9 классах и отдельно – в 10–11. Отдельно производится оценка эссе и награждение авторов лучших эссе независимо от возраста.

Критерии награждения оргкомитет публикует после олимпиады, исходя из результатов. Претензии по критериям награждения не принимаются.

Победители и призеры получают дипломы и грамоты. Порядок и регламент награждения будет определен оргкомитетом, и вся необходимая информация будет размещена на странице олимпиады.

#### 6. Апелляция

Апелляция проводится по электронной почте с 14 января по 28 января включительно. Форма апелляции будет размещена на странице олимпиады. **Оргкомитет прекращает переписку по поводу апелляций после 28 января** независимо от того, все ли вопросы выяснены.

**Искренне желаем удачи**

#### Отдельное замечание

Мы редко сталкиваемся со случаями списывания и другими недобросовестными попытками искажения результатов. Но все же бывает. Если у оргкомитета возникают сомнения в самостоятельности выполнения работы, оргкомитет вправе дисквалифицировать работу без дополнительных согласований.

## Анкета участника

Заполните, пожалуйста, поля анкеты и пришлите нам эту анкету вместе со своей работой – *одним письмом*. Обязательные поля помечены символом \*.

Проверка Вашей работы будет проведена при наличии заполненной анкеты.

\* Участник (ФИО):

\* В каком классе Вы учитесь?

\* Участвовали ли Вы в отборочном туре Московской олимпиады по вероятности и статистике?

\* Ваш почтовый адрес (нужен в случае рассылки призов):

\* Адрес электронной почты:

Телефон (по которому можно Вам позвонить):

\* Публиковать ли Вашу фамилию и имя в списке победителей, если Вы станете победителем олимпиады? **Да**

Если Вы удалили «Да», то в списке вместо фамилии будет Ваш инициал. Например, *Василий К.*

Напишите, пожалуйста, свои впечатления, замечания, предложения или пожелания, чтобы мы могли учесть их в будущем:

Отправляя эту анкету, Вы тем самым даете согласие на обработку Ваших персональных данных в той мере, в какой это необходимо для проверки работы, составления списка участников, призеров и победителей.

## Эссе

Эссе – это сочинение небольшого объема на заданную тему. В отличие от задач, эссе не подразумевает точных решений, ответов или методов, но должно быть продуманным, аргументированным, подробным.

Вы можете выбрать любую тему, две, или даже все три. Эссе оцениваются отдельно. Баллы за эссе не суммируются и не прибавляются к баллам, полученным за решение задач. За лучшие эссе участники награждаются отдельными дипломами.

**1. Человек с идеями.** Публикуем фрагмент из рассказа Аркадия Аверченко<sup>1</sup> «Человек, у которого были идеи». К герою рассказа пришел энергичный посетитель с озабоченным выражением лица. Фамилия гостя Калакуцкий, он «был бледен и худ от голода», но зато он был буквально набит идеями, которые хотел продать.

Я спросил его:

— Больше у вас ничего нет?

— Ах, конечно же есть. Я сверху донизу, как колбаса, набит разными идеями. У вас есть издатель?

— Есть.

— Не купите ли вы в компании с ним у меня одну книжку? Можно хорошо нажиться.

— Какую книжку?

— Мою. Стихи. Я издал месяц тому назад книжку, ухлопал на нее все денежки, а так как у меня нет охоты возиться с ней, то я бы уступил ее за полцены. Около десяти тысяч книжек.

— Что вы! Когда же стихи печатались в таком количестве?!

— Почему же? Тут уж наверное мой способ математически прост и осуществим... Я рассчитывал так: чем больше я напечатаю книжек, тем больше можно заработать.

— А если книжка не пойдет?

— Почему же ей не пойти? Слава Богу, стихи, кажется, хорошие. Повторяю — мой расчет математически прост: за один месяц я продал двести книг. Значит, в год я продам (или вы продадите) две тысячи четыреста, а в четыре года и два месяца — все, до последней книжечки.

Я встал с кресла:

— Довольно! Еще два слова, и мы закончим наш разговор. Я вам приведу другой расчет — он так же «математически прост и осуществим».

Почему герой рассказа так пессимистически воспринимает идею продать десять тысяч экземпляров вроде бы хороших стихов? Какие еще есть примеры, показывающие, что линейная экстраполяция (в данном случае – простая пропорция) не всегда хорошо описы-



<sup>1</sup> Аркадий Тимофеевич Аверченко (1881 – 1925) – русский писатель, сатирик, драматург и театральный критик, редактор сатирических журналов «Сатирикон» и «Новый Сатирикон».

вает будущее развитие событий? Напишите небольшое сочинение на тему обманчивости линейных моделей.

**2. Парадокс республики Марий Эл.** Если вычислить коэффициент корреляции между площадью территорий и численностью жителей муниципальных районов республики Марий Эл, то получается 0,48. Слабая, но положительная корреляция: чем больше территория, тем больше там населенных пунктов и, стало быть, жителей.

Коэффициент корреляции между площадью территории и численностью населения для городов республики равен приблизительно 0,98. А если найти коэффициент корреляции для всех населенных пунктов, не разделяя сельские и городские территории, то получается  $-0,28$ : чем больше территория, тем меньше там живет людей. Как так может быть? Проанализируйте ситуацию. Нет ли серьезной ошибки в расчетах? Нет ли ошибки в постановке задачи? Является ли республика Марий Эл исключением или это явление наблюдается и в других регионах? В других странах?

Проанализируйте как можно подробнее эту странную ситуацию в своем эссе и докопайтесь до причин явления.

Информацию о численности населения многих регионов России и других стран можно найти на сайте «Вероятность в школе» в разделе «Статистические данные»:

<https://ptlab.mccme.ru/node/350>

**3. Рекомендация авиапассажирам.** Если авиапассажир планирует пересадку в промежуточном аэропорту, он часто вынужден брать на себя риск, связанный с возможным опозданием на второй рейс. Риск особенно велик, если после первого перелета нужно пройти паспортный контроль, получить багаж и самостоятельно зарегистрироваться на следующий рейс. В таком случае прилететь в промежуточный аэропорт нужно хотя бы за пару часов до вылета второго самолета.

Предположим, пассажир летит вечером буднего дня из Москвы (Шереметьево) в Бангкок (Суварнабуми), где ему предстоит пересадка на рейс местных авиалиний. Будем считать, что минимальное необходимое на пересадку время – 2 часа. Но рейс из Шереметьева может опоздать. Опоздание чаще всего связано с поздним вылетом из-за погодных условий, перегруженностью наземных служб или поздним прибытием самолета из предыдущего рейса. Понятно, что серьезные задержки на полчаса или больше случаются нечасто, но такое бывает.

Первый рейс должен приземлиться по расписанию в 08:20 утра. Понимая, что опоздание вполне возможно, пассажиру нужно решить, брать ли билет на второй рейс, вылетающий в 10:30? Или лучше взять билет на 11:40? Или еще позже? Иными словами, какой запас времени нужен дополнительно к двум часам? Слишком долго сидеть в промежуточном аэропорту тоже не хочется.

Соберите статистику рейсов из Шереметьева в Бангкок и другие крупные города Азии и выработайте рекомендации: какой интервал между запланированной по расписанию посадкой первого рейса и вылетом второго является достаточным с вероятностью 0,95 или выше. Результатом исследования может стать короткая статья «Как стать опытным авиапассажиром».

Можно пользоваться онлайн-табло вылетов аэропорта Шереметьево и сервисом Flightradar, где несложно узнать, насколько позже или раньше расписания фактически вылетел и приземлился любой пассажирский рейс. Сервис Flightradar хранит историю рейсов за много дней.

## Задачи

**1. Кольцевые маршруты (рек. от 7 класса, 1 балл).** Дирекция железной дороги решила запустить туристические кольцевые маршруты. Кольцевой маршрут должен начинаться на какой-то станции и возвращаться на эту же станцию, но только один раз – в конце маршрута.

Изучение железнодорожной сети показало, что перегонов между станциями на 4 больше, чем самих станций.

Главный Директор потребовал, чтобы было не менее четырех различных маршрутов.

Главный Машинист выразил опасение:

– Я думаю, что мы сможем найти только три-четыре кольцевых маршрута. Больше просто нет.

– Я уверен, что мы сумеем устроить не меньше пяти кольцевых маршрутов, – возразил ему Главный Кондуктор.

Кто прав – Машинист или Кондуктор?

**2. Разность между средним и медианой.** Из 40 последовательных нечетных чисел от 1 до 79 выбрали 7 различных чисел и вычислили их среднее арифметическое  $\bar{x}$  и медиану  $m$ .

а) (рек. от 7 класса, 1 балл). Может ли быть так, что  $\bar{x} - m = \frac{2}{7}$ ?

б) (рек. от 7 класса, 2 балла). Может ли быть так, что  $\bar{x} - m = \frac{3}{7}$ ?

в) (рек. от 8 класса, 3 балла). Найдите наибольшее возможное значение разности  $\bar{x} - m$ .

**3. Красное и черное.** Имеется много красных и столько же черных карточек. Их тщательно перемешали и сложили в стопку. Валя и Коля играют в следующую игру. Вначале каждый получает 15 случайных карточек. Чужие карточки игрок не видит. Затем из стопки достают еще две случайные карточки. Если обе они красные, то Валя выиграла, если обе карточки черные, то Валя проиграла, а если эти две карточки разных цветов, то наступает ничья.

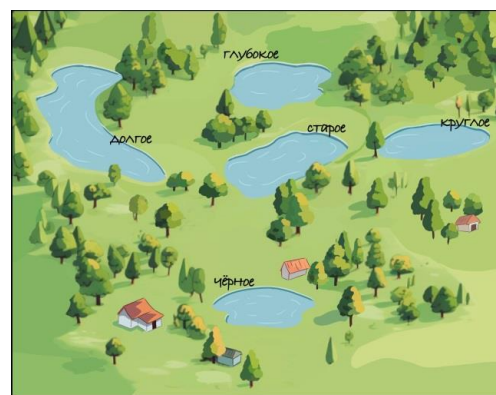
Путем сложных расчетов Валя нашла, что если вначале у нее из 15 карточек ровно 5 красных, то вероятность ее выигрыша больше вероятности ее проигрыша на число  $\alpha$ . На сколько отличаются вероятности выигрыша и проигрыша Вали, если у нее вначале оказалось:

а) (рек. от 7 класса, 1 балл) ровно 10 красных карточек из 15;

б) (рек. от 9 класса, 3 балла) ровно 11 красных карточек из 15?

**4. Ареал обитания (рек. от 7 класса, 2 балла).**

Пять озер в долине Пяти озер соединены мелкими протоками. В озерах водится крупная и ценная рыба – золотистый губошлеп. Молодые губошлепы появляются из икры на свет только в озере Долгом. Каждый годовалый губошлеп перебирается по случайной протоке в соседнее озеро независимо от других рыб. Через год подросший губошлеп еще раз мигрирует в соседнее озеро. И опять он выбирает случайную протоку независимо от других. Таким образом, каждый молодой губошлеп совершает ровно два пу-



тешества, но потом вырастает и больше уже не мигрирует, поскольку протоки слишком мелкие для взрослого золотистого губошлепа.

Рассеянный Ученый провел исследование и совершенно точно выяснил, что примерно половина взрослых губошлепов живет в озере Круглом, треть – в Долгом, а остальные – в Старом. В Глубоком и в Черном озерах взрослые особи не встречаются.

На рисунке показан план долины со всеми пятью озерами. С помощью графа покажите, как могут быть связаны протоками озера между собой.

**5. Рейтинг пассажира (рек. от 7 класса, 2 балла).** В сервисе такси «Ракета» рейтинг пассажира вычисляется как среднее арифметическое числа звезд, поставленных водителями пассажиру за несколько предыдущих поездок. Более ранние поездки не учитываются. Водитель может поставить пассажиру от 1 до 5 звезд. Рейтинг не округляется.

Ксения – курьер, и она регулярно пользуется такси «Ракета». До некоторых пор ее рейтинг был равен пяти. Однажды после поездки ее рейтинг снизился сразу до 4,94. Ксения очень расстроилась. Это было особенно неприятно, поскольку случилось в ее день рождения 15 ноября. Сможет ли Ксения, будучи предельно аккуратной, вежливой и пунктуальной пассажиркой, поднять свой рейтинг до наступления Нового года, если будет ездить на такси один раз каждый день?

**6. Лотерея для Буратино.** Кот Базилио пригласил Буратино участвовать в беспроигрышной лотерее. Буратино ставит на кон 30 золотых. Столько же ставит лиса Алиса, которая притворяется участницей, а на самом деле в сговоре с котом. После этого Алиса и Буратино по очереди бросают симметричный игральный кубик. Если у Алисы выпало  $a$  очков, у Буратино –  $b$  очков, то сумма, стоящая на кону, делится в отношении  $a : b : |a - b|$ . Алиса получает  $a$  частей, Буратино получает  $b$  частей, а  $|a - b|$  частей получает Базилио как организатор лотереи.

а) (рек. от 7 класса, 2 балла). Стоит ли Буратино соглашаться играть на таких условиях?

б) (рек. от 9 класса, 2 балла). Найдите математическое ожидание выигрыша Буратино.

**7. Недостоверные данные (рек. от 7 класса, 3 балла).** Получив заказ на научную статью о прошлом, настоящем и будущем народа Анчурии, Рассеянный Ученый запросил у четырех авторитетных организаций статистические данные о населении всех десяти крупных населенных пунктов Анчурии на текущий момент. Вскоро он получил четыре таблицы, которые показаны ниже. После тщательного рассмотрения Рассеянный Ученый забраковал три из них, посчитав, что они не заслуживают доверия. Восстановите возможный ход рассуждений Ученого и определите, какую из таблиц он не забраковал.

Табл. 1. Данные НИДА<sup>2</sup>

Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершеннолетние, чел.
Коралио	152349	38088
Сан-Матео	23417	5801
Аласан	28560	7120
Альфوران	405168	101014
Солитас	112024	27912
Паленгос	45645	11535
Пуэрте-де-Кью	34246	8433
Аркасена	12973	3266
Оридоба	17172	1797
Исабель-Нуэва	15981	4009

Табл. 2. Данные ВАНС<sup>3</sup>

Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершеннолетние, чел.
Коралио	150842	37566
Сан-Матео	21200	5302
Аласан	27585	6904
Альфوران	406825	101319
Солитас	112372	28021
Паленгос	45408	11389
Пуэрте-де-Кью	34675	8557
Аркасена	14504	3568
Оридоба	19132	2300
Исабель-Нуэва	15378	3858

Табл. 3. Данные АССиВ<sup>4</sup>

Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершеннолетние, чел.
Коралио	149842	37461
Сан-Матео	20200	5050
Аласан	26585	6646
Альфوران	405825	101456
Солитас	111372	27843
Паленгос	44408	11102
Пуэрте-де-Кью	33675	8419
Аркасена	13504	3376
Оридоба	18132	4533
Исабель-Нуэва	14378	3595

Табл. 4. Данные НБСИ<sup>5</sup>

Населенный пункт	Общая численность населения, чел.	Несовершеннолетние, чел.
Коралио	154834	38633
Сан-Матео	22157	5540
Аласан	27628	6932
Альфوران	404051	101074
Солитас	113872	28263
Паленгос	46636	11628
Пуэрте-де-Кью	36251	9003
Аркасена	11420	2841
Оридоба	15975	1458
Исабель-Нуэва	15168	3867

<sup>2</sup> Национальный институт демографии Анчурии.

<sup>3</sup> Всеанчурийская Академия Народного Счастья.

<sup>4</sup> Анчурийская служба статистики и вероятности.

<sup>5</sup> Независимое бюро социологических исследований им. президента Оливарры.





**8. Беллинг.** Трое беллингистов – Акира, Бидзо и Цунаки – борются в круге, пихая друг друга животами. Цель – выпихнуть из круга всех соперников. Последний, кто остался в круге, тот и победил. В беллинге вероятности победы участников относятся так же, как массы их животов, сколько бы борцов ни участвовало в схватке. Перед началом соревнований оглашаются результаты взвешивания животов всех спортсменов.

После взвешивания хитрый Акира отвел Бидзо в сторону и тихо сказал:

– Давай объединим усилия против этого толстяка Цунаки. Сначала мы выпихнем его суммарной массой наших животов, а затем уже честно сразимся между собой.

Ничего не подозревающий Цунаки подошел к ним и предложил:

– Чем бессмысленно толкаться втроем, давайте выберем честным жребием двоих: пусть сначала пихаются они, а третий будет бороться с победителем.

– Я категорически возражаю! – закричал Акира. Он возражал всегда и всем.

– Хорошо, тогда я ставлю вопрос на голосование, – рассудительно заявил Цунаки. – Я за, Акира против, и теперь все зависит от решения Бидзо.

Вообще-то Бидзо не очень склонен менять правила или вступать в подлые сговоры, но готов на все, если это сулит ему выгоду, то есть больше шансов на победу.

а) (рек. от 8 класса, 1 балл). Соглашаться ли ему с Акирой?

б) (рек. от 8 класса, 3 балла). Голосовать ли за предложение Цунаки, если он не примет предложение Акиры?

**9. Теннис.** Коля и Валя играют в настольный теннис до трех побед: тот, кто победил три раза (не обязательно подряд), тот и выиграл весь турнир. Они играют одинаково хорошо: каждый из них выигрывает с вероятностью  $1/2$ . Ничьих в настольном теннисе не бывает.

а) (рек. от 8 класса, 2 балла). Что вероятнее: что последняя партия окажется пятой по счету или четвертой по счету?

б) (рек. от 9 класса, 2 балла). Найдите математическое ожидание числа сыгранных партий.

**10. Наследство** (рек. от 9 класса, 2 балла). Было у отца ровно 13 быров<sup>6</sup> земли. Умирая, отец завещал каждому из своих трех сыновей какое-то целое число быров своего поля.

После смерти отца брат Тан немедленно продал свой участок соседу и переехал в город. А братья Хын и Мун засеяли свои участки кукурузой. То же самое сделал со своей частью поля сосед. Кукуруза везде взошла густо и выбросила сочные, вкусные початки.

Повадилась по ночам прилетать на поле Вещая и Вечная Птица Рю<sup>7</sup>. Прилетит, сядет в случайном месте и съест початок – убыток хозяину. Взлетит, покружит над полем, снова сядет, съест еще початок и улетит.

Известно, что математическое ожидание числа братьев, несущих убытки в результате каждого ночного налета, равно ровно 1. Сколько быров завещал отец брату Тану?

<sup>6</sup> Быр – мера площади в той счастливой стране, где живут Хын, Мун и Тан.

<sup>7</sup> Про Вещую и Вечную Птицу Рю известно лишь, что она любит кукурузу, прилетает когда хочет и садится куда попало безо всякой связи с предшествующими событиями: никакая точка поля не является для нее более предпочтительной, чем любая другая.

**11. Два орла подряд (рек. от 9 класса, 3 балла).** Монету бросают до тех пор, пока не выпадут два орла подряд. Сколько для этого потребуется в среднем бросков?

**12. Случайные ладьи (рек. от 9 класса, 3 балла).** На шахматную доску на 8 случайных полей поставили 8 ладей. Найдите математическое ожидание числа ладей, которые находятся под боем хотя бы одной другой ладьи.

**13. Бал (рек. от 9 класса, 4 балла).** На бал пришли 10 кавалеров и 10 дам, не знакомых друг с другом прежде. Как только объявили первый танец, все десять кавалеров в случайном порядке начали приглашать симпатичных им дам. При условии взаимной симпатии дамы отвечали согласием. Взаимные симпатии в каждой паре кавалер-дама образуются с вероятностью  $p$  случайно и независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что танцевать будут все и никто не останется без партнера.

**14. Коллекция (рек. от 9 класса, 7 баллов).** Рассеянный Ученый коллекционирует эксклюзивные авторучки в футлярах. Иногда он сам покупает красивую ручку в футляре, иногда дарят коллеги по работе. Обрадованный Ученый тут же достает всю коллекцию, вынимает все ручки из футляров и вспоминает, при каких обстоятельствах в его коллекцию попала каждая ручка. Затем он снова убирает ручки в футляры, но поскольку не помнит, какая ручка где лежала, рассовывает их в совершенно случайном порядке.



Прошлый раз Ученый доставал и рассматривал свое собрание ручек позавчера, а сегодня ему подарили новую ручку, он опять пополнил коллекцию и снова перепутал все ручки.

а) Докажите, что вероятность того, что сейчас ровно одна ручка оказалась в своем футляре, равна вероятности того, что вчера ни одна из ручек не лежала в своем футляре.

б) Обозначим  $q_n$  вероятность того, что в коллекции из  $n > 3$  случайно разложенных по футлярам ручек ни одна не оказалась в своем футляре. Докажите, что

$$q_n = \frac{n-1}{n} q_{n-2} + \frac{1}{n} q_{n-3}.$$

**15. Мешок конфет (рек. от 10 класса, 5 баллов).** Средняя масса конфеты белого шоколада и средняя масса конфеты темного шоколада в точности совпадают. Конфеты темного шоколада очень похожи друг на друга, но немного отличаются по весу, зато все конфеты белого шоколада весят совершенно одинаково.

В мешке ровно 100 кг конфет темного шоколада. В другом таком же мешке ровно 100 кг конфет белого шоколада. В каком мешке больше конфет? Сравните математические ожидания количества конфет в первом мешке и во втором.

**16. Дробная часть (рек. от 11 класса, 5 баллов).** Пусть  $k$  и  $n$  – произвольные натуральные числа. Из промежутка  $(0; n^k)$  выбирают случайное действительное число  $X$  и рассматривают случайную величину  $Y = \left\{ \frac{n}{\sqrt[k]{X}} \right\}$ . Фигурными скобками обозначена дробная

часть числа. Докажите, что  $EY < \frac{1}{2}$ .