И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

Задача о разборчивой невесте

Постановка задачи и небольшое обсуждение

Задача, о которой пойдет речь, известна под разными именами. Впервые она была опубликована в «Scientific American»[1] в феврале 1960 г. популяризатором математики Мартином Гарднером[2] как «задача секретаря». Сам Гарднер не является ее автором.

Суть такова — нужно найти наибольший элемент некоторой неизвестной случайной последовательности при однократном просмотре. Известно количество членов последовательности, но неизвестно, насколько велики они могут быть. При этом формулировка довольно запутанная, поскольку требуется множество естественных условий и ограничений, которые нужно явно оговорить. Ясно, что такую задачу разные люди пытались «завернуть» в разные сюжеты.

Например, «задача секретаря» формулируется следующим образом. Секретарь ищет машинистку для шефа. К нему по очереди приходят претендентки. Секретарь измеряет скорость письма и должен сейчас же принять машинистку на работу или отказать ей. Трудность в том, что секретарь не может сказать: «Спасибо, мы с вами свяжемся». Задача — найти стратегию, при которой вероятность выбрать самую быструю машинистку становится наибольшей.

История задачи довольно темная. Если заменить секретаря капризной невестой, а машинисток — чередой женихов, то получится задача, которую сформулировал Меррилл Флад в своих лекциях в 1950-х годах[3]. В 1958 г. он направил ряду математиков письма, в которых излагал стратегию, сводящуюся к тому, что невеста должна отвергнуть некоторое количество женихов, а потом выбрать того из следующих, кто лучше всех отвергнутых (*стоп-стратегия*). Разумеется, если таковой отыщется. Стратегия предполагает, что достоинства жениха могут быть сколь угодно высокими без ограничений, то есть невеста не имеет никакого представления о том, насколько хорош наилучший кандидат.

Немедленно началось соревнование за право считаться автором решения. Лео Мозер и Дж. Р. Паундер — авторы анализа стратегии. В 1963 г. Евгений Борисович Дынкин дал решение в частном случае. Более общее решение принадлежит Сабиру Меджидовичу Гусейну-Заде (1966)[4]. Разумеется, нашлись свидетельства того, что подобные задачи всплывали в XIX в., и даже Иоганн Кеплер вроде бы что-то такое писал или говорил.

Автор этих строк познакомился с задачей в формулировке не про секретаря и не про невесту, а про жестокого шаха и любвеобильного визиря, который должен либо жениться, либо умереть, при-

[1] Старейший научно-популярный журнал в США (с 1845 г.). Издание этого журнала на русском языке «В мире науки» выходило с 1983 по 1993 год и возобновлено в 2003 г.

[2] Мартин Гарднер (1914–2010) — математик-любитель, популяризатор науки.

[3] В русской литературе чаще всего задача встречается в формулировке о разборчивой невесте.

[4] Известна популярная брошюра С.М. Гусейна-Заде «Разборчивая невеста», вышедшая в серии «Библиотека «Математическое просвещение» (вып. 25, Москва, МЦНМО, 2003).

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

чем второе вероятнее. В таком виде задачу сформулировала Евгения Васильевна Веретенникова на матфаке МГПИ на своей лекции в 1987 г., совершенно не обращая внимания на всякие культурно-исторические несоответствия[5].

Даже самая элегантная с математической точки зрения задача выглядит непривлекательно, если у нее очень специфическое или запутанное, перегруженное и неестественное условие. Спасти и заставить «сверкать» такую задачу можно лишь литературной обработкой. Позвольте представить версию Евгении Васильевны в моей обработке.

Жил-был шах, и был у него молодой, умный и красивый визирь, слухи о достоинствах которого дошли даже до шахского гарема, что, с точки зрения шаха, было слишком. «Казнить наглеца! Но, с другой-то стороны, — рассуждал шах, — малый и вправду толковый, к тому ж визирь как-никак. Надо дать ему шанс, хоть и небольшой. Пусть испытает судьбу». После недолгих приготовлений шах пригласил визиря на беседу. В богато убранной спальне с потолка свисали два шнура, какие обычно используют для вызова прислуги. Визирь с изумлением разглядывал интерьер, а шах обратился к нему с речью.

Слышал я, визирь, ты беден
И ни разу не женат...
Значит, честный! Не мздоимец
И, видать, не казнокрад.

В наши дни такой феномен
Трудно встретить меж людьми.
Но пора тебе жениться.
Так что слушай, шер ами.

Сто наложниц из сераля,
Все красавицы, поверь,
По одной к тебе проходят
В эту узенькую дверь.

В совершенном беспорядке,
Безо всяких там систем.
Сам Ахмет — мой старший евнух —
Без понятья, кто за кем.

Подойдет к тебе девица,
В ухо ласково шепнет,
Сколь за ней как за невестой
Шах в приданое дает.

Чье-то больше, чье-то меньше,
Одинаковых двух нет.
Про других она не скажет —
Вредно знать чужой секрет.

После краткого знакомства
Должен ты мне дать ответ:
Ты берешь себе невесту
Или твердо скажешь «нет».

Если ты ее отвергнешь,
Потяни за черный шнур,
Мол, пардон, у этой крали
Недостаточный гламур.

Не подходите друг другу?
Невеликая печаль.
Пусть походкою упругой
Возвращается в сераль.

Но возврата к этой деве
У тебя, мой милый, нет.
Евнух шлет тебе другую
Кандидатку для бесед.

Если ж ты решил жениться,
Потяни за красный шнур:
Кончен конкурс, найден главный
И единственный лямур.

Если вдруг твоя невеста
Всех богаче остальных,
Так и быть — с тобою место
И пособье для родных;

И, конечно же, девица,
Свадьба, отпуск — пять ночей!
Я не стану мелочиться,
Смету пишет казначей.

Если ж хоть одна другая
Состоятельней твоей,
То, прости, не будет свадьбы.
Сэкономлю я на ней.

Не из скаредности, что ты!
С этих денег оплачу
Нестандартную работу
Мухаммеду-палачу.

Для простоты будем считать, что наложниц не сто, а n. Пусть a_j — приданое j-й кандидатки (в томанах или риалах, например). Визирь имеет дело со случайной перестановкой n неизвестных заранее чисел. Самое неприятное, что неизвест-

[5] Например, в большинстве восточных стран принято платить за невесту, а не получать приданое.

но наибольшее значение, которое очень волнует визиря, поскольку дает единственный шанс остаться в живых. Будем дополнительно предполагать, что визирь не может оценить наибольшее из чисел a_j или не задумывается об этом.

В этих условиях, после того как визирь услышит от k-й кандидатки число a_k, он имеет информацию обо всех числах от a_1 до a_k.

Если a_k больше, чем все предыдущие значения, то перед визирем *серьезная кандидатка,* и он должен принять решение: взять ее в жены или отвергнуть, и надеяться на то, что где-то впереди есть еще более богатая невеста. Таким образом, появление каждой серьезной кандидатки является не только испытанием для нервов визиря, но и ключевой точкой в построении алгоритма. Рано или поздно визирь должен выбрать одну из серьезных кандидаток: иначе он останется без головы. Проблема лишь в том, что он не уверен, что за очередной серьезной кандидаткой когда-нибудь последует еще более серьезная.

Таким образом, дело сводится к изучению последовательности серьезных кандидаток: визирь в какой-то момент должен принять решение о женитьбе на следующей серьезной кандидатке (это и есть стоп-стратегия).

Вереницы кандидаток

Первая кандидатка — серьезная, поскольку перед ней никого нет. Каждая последующая будет серьезной, если она богаче всех предыдущих. Мы получаем разбиение перестановки на *вереницы* — структуру, которую определили и обсуждали в задаче об узком шоссе (Математика, № 2, 2023) и в задаче о циклах (Математика, № 6, 2023). Разница в том, что в задаче об автомобилях на шоссе лидерами вереницы были самые медленные автомобили (числа, которые меньше всех предыдущих), а здесь лидерами будут серьезные кандидатки (числа в последовательности a_1, ..., a_n, которые больше всех предыдущих).

Тогда цель визиря — жениться на кандидатке, которая возглавляет *последнюю вереницу*, а для этого нужно отвергнуть всех кандидаток из *предпоследней вереницы*. Отпустив кандидатку с некоторым номером k, визирь должен надеяться на то, что скоро появится абсолютная чемпионка, то есть лидер последней вереницы. Это все равно, что надеяться на то, что лидер предпоследней вереницы имеет номер не больше k, а лидер последней — номер больше k.

Итак, задача формализована: нужно найти такое k, что вероятность p_k события «элемент a_k принадлежит предпоследней вереницe» наибольшая. Разбиение на вереницы условно показано на рисунке 1.

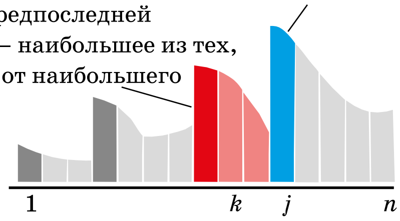

Рис. 1. Схема последовательности a_k. Синим цветом выделен лидер последней вереницы, красным — лидер предпоследней

Небольшая проблема состоит в том, что перестановка может состоять из единственной вереницы, а предпоследней вереницы нет вовсе. Этот тривиальный случай рассмотрим отдельно: вероятность того, что первое число a_1 — самое большое из всех, равна $p_0 = \frac{1}{n}$.

Будем надеяться, что при каком-то k из отрезка от 1 до n вероятность p_k больше $\frac{1}{n}$. Чтобы не запутаться, разобьем задачу на три части. Сначала найдем вероятности p_k, потом посмотрим, при каком k вероятность p_k наибольшая, а затем — чему равна эта наибольшая вероятность.

Задача 1. Последовательность a_1, ..., a_n является случайной перестановкой n попарно различных положительных чисел. Найти вероятность p_k события «элемент a_k является членом предпоследней вереницы».

Напрасно мы будем просматривать статью «Задача о циклах» (Математика, № 6, 2023) в поисках подсказки. Дело в том, что там мы рассматривали нумерацию вереницы с начала перестановки, а не с конца. Это не одно и то же, поскольку разбиения перестановки на вереницы слева направо и справа налево совсем разные и плохо связаны между собой. Наша задача принципиально новая.

Решение. Событие «элемент a_k принадлежит предпоследней вереницe» наступает тогда и только тогда, когда происходят два следующих события (см. рис. 1):

1) наибольший элемент перестановки находится на позиции с каким-то номером $j > k$ из n равновозможных (вероятность этого $\frac{1}{n}$);

2) при этом условии лидер предпоследней вереницы (наибольшее из чисел, расположенных левее самого большого) находится на одной из первых k позиций из $(j-1)$ равновозможных. Вероятность этого $\frac{k}{j-1}$.

Суммируя произведения $\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{j-1}$ по всем $j = k+1, \ldots, n$, получаем:

$$p_k = \frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{k}{n}\left(H_{n-1}-H_{k-1}\right), \qquad (1)$$

где, как обычно, $H_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ — n-е гармоническое число.

Формально задача решена — получена формула для p_k, хотя и не очень удобная с вычислительной точки зрения. Придумаем другую. Например, рекуррентную. Для этого введем дополнительно индекс n, маркирующий длину перестановки:

$$p_{n,k} = \frac{k}{n}\left(H_{n-1}-H_{k-1}\right).$$

Поищем рекурсию, выражающую вероятность $p_{n,k}$ через такие же вероятности с меньшими индексами.

При $k = n$ получаем: $p_{n,n} = 0$, в частности, $p_{1,1} = 0$, если считать, что $H_0 = 0$.

При $n > 1$ и $1 \le k < n$

$$p_{n,k} = \frac{k}{n}\left(H_{n-1}-H_{k-1}\right)=\frac{k}{n}\cdot\left(H_{n-2}-H_{k-1}+\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=\frac{k}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{k}p_{n-1,k}+\frac{1}{n-1}\right),$$

откуда

$$p_{n,k} = \frac{n-1}{n}p_{n-1,k}+\frac{k}{n(n-1)}. \qquad (2)$$

Равенства (2) достаточно, чтобы построить таблицу чисел $p_{n,k}$ последовательно по столбцам сверху вниз, опираясь на диагональ нулевых вероятностей $p_{n,n}$, которые выделены синим цветом на рисунке 2.

В качестве задач для самостоятельного решения в конце статьи мы предложим еще два равенства:

$$p_{n,k} = \frac{k}{k-1}\left(p_{n,k-1}-\frac{1}{n}\right) \text{ при } 1 < k \le n \qquad (3)$$

и

$$p_{n,k} = \frac{k}{n}p_{n-1,k-1}+\left(1-\frac{k}{n}\right)p_{n-1,k} \text{ при } 1 \le k \le n. \qquad (4)$$

Равенство (4) наводит на мысль о том, что главным героем всей конструкции является отношение $\frac{k}{n}$. Можно было бы использовать это соображение в дальнейших рассуждениях, но мы пойдем другим путем.

Решение задачи

Таблица на рисунке 2 убеждает в том, что положение визиря не так безнадежно, как могло показаться вначале. Наибольшие вероятности (выделены красным), конечно, уменьшаются с ростом n, но не очень стремительно. Более того, кажется, что они вовсе не стремятся к нулю. Теперь нужно поймать закономерность.

Если $n = 2$, то $p_0 = p_1 = 0{,}5$, и в таком случае у визиря была бы сложная дилемма: в обоих вариантах одинаково вероятно лишиться головы.

I19 =($B19-1)/$B19*I18+I$3/$B19/($B19-1)

Задача о разборчивой невесте. Вероятности p_n_k

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,00000	0,00000									
2	0,50000	0,50000	0,00000								
3	0,33333	0,50000	0,33333	0,00000							
4	0,25000	0,45833	0,41667	0,25000	0,00000						
5	0,20000	0,41667	0,43333	0,35000	0,20000	0,00000					
6	0,16667	0,38056	0,42778	0,39167	0,30000	0,16667	0,00000				
7	0,14286	0,35000	0,41429	0,40714	0,35238	0,26190	0,14286	0,00000			
8	0,12500	0,32411	0,39821	0,40982	0,37976	0,31845	0,23214	0,12500	0,00000		
9	0,11111	0,30198	0,38175	0,40595	0,39312	0,35251	0,28968	0,20833	0,11111	0,00000	
10	0,10000	0,28290	0,36579	0,39869	0,39825	0,37282	0,32738	0,26528	0,18889	0,10000	0,00000
11	0,09091	0,26627	0,35072	0,38972	0,39841	0,38438	0,35216	0,30480	0,24444	0,17273	0,09091
12	0,08333	0,25166	0,33665	0,37997	0,39551	0,39023	0,36827	0,33243	0,28468	0,22652	0,15909
13	0,07692	0,23871	0,32357	0,36997	0,39073	0,39226	0,37840	0,35173	0,31406	0,26678	0,21096
14	0,07143	0,22715	0,31145	0,36003	0,38480	0,39171	0,38434	0,36507	0,33559	0,29718	0,25083
15	0,06667	0,21677	0,30021	0,35031	0,37819	0,38941	0,38729	0,37406	0,35131	0,32022	0,28173
16	0,06250	0,20739	0,28978	0,34092	0,37122	0,38590	0,38809	0,37985	0,36269	0,33771	0,30579

Рис. 2. Построение вероятностей $p_{n,k}$ в MS Excel с помощью (2). Наибольшая вероятность при каждом n выделена красным цветом

Но при $n \geq 3$ сомнений нет. Если наложниц трое, то наибольшая вероятность p_1, поэтому нужно отпустить первую в сераль и затем соглашаться на брак с той, которая окажется богаче первой. Вероятность того, что такая найдется и действительно будет самой богатой, равна $p_1 = 0{,}5$. И так далее. Например, если наложниц $n = 16$, то отпустить с миром нужно шестерых, поскольку наибольшая в 16-й строке вероятность — это p_6, которая равна 0,38809. Это и есть вероятность того, что 6-я наложница оказалась в предпоследней веренице, а значит, скоро появится следующая серьезная кандидатка, которая и есть лидер последней вереницы, то есть самая богатая из всех.

Ну хорошо: если наложниц $n = 3$, то пропустить нужно одну, если $n = 4$, то тоже одну, если $n = 5$, то нужно пропустить двоих, а если $n = 16$, то шестерых. А где закономерность? Вообще-то она тоже видна на рисунке 2. Наибольшие числа, выделенные красным цветом, группируются вдоль некоторой прямой. Собственно, ее-то нам и нужно найти.

Задача 2. При каком k вероятность p_k наибольшая?

Чтобы узнать, при каком k вероятность p_k наибольшая, нужно найти наибольшее решение неравенства

$$p_k - p_{k-1} \geq 0.$$

Преобразуем разность:

$$p_k - p_{k-1} = \frac{k}{n}\left(H_{n-1} - H_{k-1}\right) - \frac{k-1}{n}\left(H_{n-1} - H_{k-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(k\left(H_{k-2} - H_{k-1}\right) - H_{k-2} + H_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(-\frac{k}{k-1} - H_{k-2} + H_{n-1}\right) = \frac{1}{n}\left(-1 - \frac{1}{k-1} - H_{k-2} + H_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(H_{n-1} - H_{k-1} - 1\right).$$

Получается неравенство

$$H_{n-1} - H_{k-1} \geq 1. \qquad (5)$$

С разностью гармонических чисел мы уже встречались в статье о чемоданах (Математика, № 9, 2023), но там мы ограничились лишь нижней оценкой. Можно было бы так же действовать и в этот раз, но мы замахнемся на большее и получим довольно тонкую оценку.

Представим число

$$H_{n-1} - H_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$

как площадь фигуры, составленной из столбиков на отрезке $[k; n]$ (рис. 3).

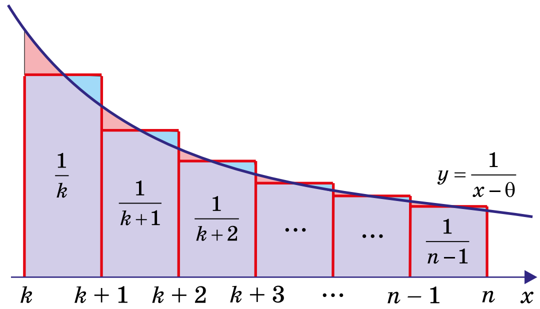

Рис. 3. Приближение суммы $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ функцией $y = \frac{1}{x-\theta}$

Верхняя граница фигуры лежит над линией $y = \frac{1}{x}$ и под линией $y = \frac{1}{x-1}$. Значит, существует некоторое число $\theta \in (0; 1)$, при котором

$$H_{n-1} - H_{k-1} = \int_k^n \frac{1}{x-\theta}\,dx = \ln\frac{n-\theta}{k-\theta}; \qquad (6)$$

разумеется, θ зависит от k и n. Неравенство (5) принимает вид

$$\ln\frac{n-\theta}{k-\theta} \geq 1,$$

откуда

$$k \leq \frac{n}{e} + \theta\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Значит, наибольшее целое k равно $\left[\frac{n}{e} + \theta\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right]$, то есть именно при таком k вероятность p_k наибольшая. Полученный результат говорит, что

$$k = \left[\frac{n}{e}\right] \text{ или } k = \left[\frac{n}{e}\right] + 1, \qquad (7)$$

поскольку

$$0 < \theta\left(1 - \frac{1}{e}\right) < 1.$$

Результат (7) можно уточнить. При больших n и k число θ близко к 0,5. Это видно на рисунке 3: чем правее, тем меньше должны различаться по длине горизонтальные катеты розовых и голубых треугольников. Сейчас будем считать это очевидным, а в конце статьи докажем. Считая, что n достаточно велико, видим, что и k велико $\left(k > \frac{n}{e} - 1\right)$, и потому положим $\theta = 0{,}5$. Получим уточнение равенств (7):

$$k = \left[\frac{n}{e} + 0{,}5\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right] \approx \left[\frac{n}{e} + 0{,}316\right]. \qquad (8)$$

Непосредственная проверка показывает, что (8) дает точное решение для малых n. При больших n решение тем более точное в силу сходимости:

$$\left(H_{n-1} - H_{k-1}\right) - \ln\frac{n-0{,}5}{k-0{,}5} \xrightarrow{n,k\to\infty} 0.$$

Значит, наилучшая стоп-стратегия визиря такова: нужно пропустить $k=\left[\frac{n}{e}+0{,}316\right]$ претенденток, запомнив лишь наибольшее из приданых $M = \max(a_1, \ldots, a_k)$. Например, при $n = 100$ пропустить нужно $k = 37$ претенденток (рис. 4).

После этого нужно ждать кандидатку, чье приданое больше M, и объявить ее невестой. Вероятность p_k того, что такая кандидатка найдется и окажется богаче не только всех отвергнутых, но и всех еще не пришедших, больше, чем при любом другом k.

Осталось найти, чему равна эта наибольшая вероятность (хотя визирю это знание уже ничего не даст — больше от него ничего не зависит).

Задача 3. Найти наибольшую вероятность p_k.

Сначала будем считать, что n фиксированно. Из равенства (1) и неравенства (5), учитывая, что $k>\frac{n}{e}-1$, получаем оценку снизу:

$$p_k=\frac{k}{n}\left(H_{n-1}-H_{k-1}\right)\geq\frac{k}{n}>\left(\frac{n}{e}-1\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}.$$

Найденное k является наибольшим решением неравенства (5), и потому

$$H_{n-1}-H_k<1.$$

Это значит, что

$$H_{n-1}-H_{k-1}<1+\frac{1}{k}.$$

Тогда, учитывая, что

$$k<\frac{n}{e}+1,$$

получаем оценку сверху:

$$p_k=\frac{k}{n}\left(H_{n-1}-H_{k-1}\right)<\frac{k}{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{k}{n}+\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\left(\frac{n}{e}+1\right)+\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{1}{e}+\frac{2}{n}.$$

Объединим оценки:

$$\frac{1}{e}-\frac{1}{n}<p_k<\frac{1}{e}+\frac{2}{n}.$$

Увеличивая теперь n, получим:

$$\lim_{n\to\infty}p_k=\frac{1}{e}.$$

Шансы визиря не так ничтожны, как могло показаться вначале. Если все сделать правильно, то вероятность благополучного исхода равна примерно $\frac{1}{e}\simeq 0{,}368$, а на самом деле немного больше.

В заключение поясним, что имелось в виду, когда предполагалось, будто визирь (секретарь, невеста) не имеет представления о том, насколько велико может быть число $\max(a_1, \ldots, a_n)$, то есть наибольшее приданое (скорость машинописи или добродетель жениха). Предположим, что от кого-то (скажем, от Ахмета) визирь узнал, что на приданое наложницам шах ассигновал всего 10 000 томанов. В этом случае (при появлении наложницы с приданым 5000 томанов или больше) визирь должен забыть все стратегии и немедленно жениться.

Но даже при отсутствии инсайдерского слива визирь имеет ненулевую информацию о возможном максимальном приданом. Дело в том, что на множестве натуральных чисел отсутствует равномерное распределение. Иными словами, ни шах и никто другой не могут выбрать совершенно случайное натуральное число, не имеющее преимуществ ни перед каким другим. В любом случайном опыте, где выбирается случайное натуральное число, элементарные события *неравновозможны*. Даже бесконечно богатый шах не может выдать просто большое, невероятно большое и поистине колоссальное приданое

O22 =ЦЕЛОЕ(N22/EXP(1)+0,5*(1-EXP(-1)))

	A	B	C	E	F	H	I	K	L	N	O	Q	R	T	U
1															
2		n	k	n	k	n	k	n	k	n	k	n	k	n	k
15		13	5	33	12	53	19	73	27	93	34	113	41	133	49
16		14	5	34	12	54	20	74	27	94	34	114	42	134	49
17		15	5	35	13	55	20	75	27	95	35	115	42	135	49
18		16	6	36	13	56	20	76	28	96	35	116	42	136	50
19		17	6	37	13	57	21	77	28	97	36	117	43	137	50
20		18	6	38	14	58	21	78	29	98	36	118	43	138	51
21		19	7	39	14	59	22	79	29	99	36	119	44	139	51
22		20	7	40	15	60	22	80	29	**100**	**37**	120	44	140	51

Рис. 4. Расчет по формуле (8). Для вычисления целой части использована функция ЦЕЛОЕ

с равными вероятностями. Предполагая противное, мы попадаем в ситуацию, похожую на парадокс двух конвертов[6] и приходим к противоречию.

Эта неравновозможность теоретически может быть использована в построении наилучшей стратегии. Например, если у очередной наложницы *чрезвычайно большое приданое*, визирь должен выбрать ее, нарушив стоп-стратегию. К сожалению, все эти рассуждения не помогут визирю, поскольку он не знает, где граница, отделяющая просто большое приданое от чрезвычайно большого, и не может сколько-нибудь правдоподобно ее установить в процессе эксперимента. Чем-то похоже на хороший детектив: улики есть, а как ими распорядиться, неясно. Поэтому разумно предполагать полное отсутствие информации о максимуме, и в этом предположении мы задачу решили.

Приложение (доказательство того, что $\theta \to 0{,}5$)

Покажем, что при n, $k \to \infty$ число θ из равенства (6) стремится к $0{,}5$ слева, все время оставаясь меньше $0{,}5$.

Из всех столбиков на рисунке 3 достаточно рассмотреть один. Пусть столбик высотой $\frac{1}{m}$ построен на отрезке $[m;\, m+1]$ (рис. 5). Если мы докажем, что в равенстве

$$\frac{1}{m} = \int_m^{m+1} \frac{dx}{x-\theta} = \ln\frac{m+1-\theta}{m-\theta} \qquad (9)$$

$\theta \to \frac{1}{2}$ при $m \to \infty$, то тем самым докажем это для всего равенства (6).

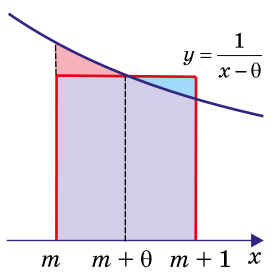

Рис. 5

[6] Ведущий шоу выдает двум участникам по конверту. Известно, что в одном из них денег вдвое больше, чем в другом. Участники могут поменяться конвертами. Если считать, что в конверте соперника денег вдвое меньше или вдвое больше с равными шансами, то обоим выгодно меняться: математическое ожидание суммы в конверте после обмена у каждого игрока оказывается в 1,25 раза больше, чем до обмена. С другой стороны, если у одного ожидание суммы растет, то у другого оно должно уменьшаться. Противоречие.

Доказательство. Из (9) получаем:

$$\frac{1}{m} = \ln\left(1 + \frac{1}{m-\theta}\right),$$

то есть

$$e^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{1-\frac{\theta}{m}}.$$

Разложим обе части в степенные ряды:

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{6m^3} + \ldots = 1 + \frac{1}{m} + \frac{\theta}{m^2} + \frac{\theta^2}{m^3} + \ldots .$$

После очевидных преобразований получаем:

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1-6\theta^2}{6m} + \ldots + \frac{1-k!\cdot\theta^{k-1}}{k!\,m^{k-2}} + \ldots \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Утверждение доказано.

И уж совсем просто показать, что $\theta < 0{,}5$ для всех k и n. Предположим, что $\theta \geq 0{,}5$. Тогда площадь розового треугольника на рисунке 5 больше площади голубого, что противоречит предположению о равенстве этих площадей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите вероятность того, что в перестановке длины $n = 45$ девятый по счету элемент принадлежит предпоследней веренице.

2. Докажите соотношение (3).

3. Докажите соотношение (4).

4*. Докажите, что при $1 \leq k \leq n$

$$p_{n,k} = \frac{1}{C_n^k}\sum_{i=1}^{n-k}\frac{C_{n-i-1}^{k-1}}{i}.$$

Ответы к задачам из статьи «Задача о чемоданах»

1. 2,067 и 1,929. **2.** Точное значение 43, оценка по формуле (6) дает 45. **3.** 0,436.

4. $\mathrm{P}(X_j = k) = \dfrac{aC_{a-1}^{j-1}C_{n-a}^{k-j}}{nC_{n-1}^{k-1}}.$

Решение. Один из a чемоданов должен оказаться на k-й позиции. Вероятность этого $\frac{a}{n}$. При этом условии среди первых $(k-1)$ чемоданов должно быть $(j-1)$ Петровских и $(k-j)$ чужих. Условная вероятность этого события равна $\dfrac{C_{a-1}^{j-1}C_{n-a}^{k-j}}{C_{n-1}^{k-1}}$. Осталось применить правило умножения вероятностей.