ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Задача кассира метро и формула Муавра–Стирлинга

Наличных в жизни все меньше и меньше, тем более на транспорте. Но то и дело попадается какой-нибудь старомодный пассажир, который не хочет пользоваться ни банковской, ни транспортной картой, ни смартфоном и никаким другим продвинутым способом. Он просто сует кассиру тысячную купюру и просит разовый билет.

Умение быстро давать сдачу и разменивать деньги было и остается главной доблестью и добродетелью кассиров в любом метрополитене мира. Хороший кассир знает, сколько и каких столбиков монет нужно иметь на столе в готовности, чтобы быстро разменять 100 руб. или 500 руб., не задерживаясь ни на секунду.

Хорошо помню, как, не позаботившись заранее о мелочи в кармане и сжимая в ладони рубль или трешку, я стоял в быстро идущей очереди таких же недотеп на станции метро «Кузьминки». Я поражался скорости, с которой немолодая дама в окошке принимает решения и высыпает размен пятаками и серебром — современные автоматы работают медленнее. Перед нею на вытертой добела деревянной столешнице стояли аккуратные столбики монет. В каждом столбике было девять монет: четыре желанных пятака[1], два гривенника и три двугривенных. Рядом были столбики из одного двугривенного, четырех пятиалтынных[2] и — неизменно — четырех пятаков. Можно было бы поисследовать вопрос о соотношении, в котором монетный двор чеканил монеты, на основе лишь этих столбиков в метро. Почему-то я никогда не видел в стопках полтинников.

Однажды, поджидая приятеля на «Комсомольской», через стеклянную перегородку кассы я имел удовольствие наблюдать, как кассир заготавливает столбики, воспользовавшись короткой паузой в потоке пассажиров. Женщина делала это с закрытыми глазами. Она выгребала откуда-то из-под столешницы горстки монет и сортировала их на ощупь, давая глазам и мозгу краткий отдых. С головокружительной быстротой столбики выстраивались шеренгами, как солдаты на плацу. Не знаю отчего вдруг пришла мысль: ведь она не смотрит на номинал, значит, монеты ложатся орлами или решками вверх случайно. Интересно, а много ли столбиков, где решек и орлов поровну? Нет, это вопрос тривиальный. Интересней знать, часто ли получаются соседние столбики, где орлов поровну. Именно с этой новой для себя задачей я вошел в вагон метро, так и не дождавшись приятеля. Задачи хватило на всю поездку.

Задача. В двух столбиках по n монет, которые лежат орлом или решкой вверх случайным образом. Какова вероятность события A «монет, лежащих орлом вверх, в этих столбиках поровну»?

[1] Вход в метро оплачивался пятикопеечной монетой — она служила жетоном.

[2] Гривенник, пятиалтынный и двугривенный — монеты номиналом 10, 15 и 20 копеек соответственно. Слово «пятиалтынный» употреблялось очень редко. Полтинник — 50 копеек. Монеты от 1 копейки до 5 копеек были желтоватыми из медно-цинкового сплава, а монеты от 10 копеек были белыми из-за преобладания никеля. Поэтому в разговорной речи их часто называли серебром.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Решение. *Способ I (трудовой).* Вероятность того, что в обоих столбиках вовсе нет орлов, равна

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{4^n}.$$

Вероятность того, что в обоих столбиках по одному орлу, равна

$$\left(C_n^1\frac{1}{2^n}\right)^2=\left(C_n^1\right)^2\frac{1}{4^n},$$

и так далее: вероятность того, что орлов в обоих столбиках по k штук, равна

$$\left(C_n^k\right)^2\frac{1}{4^n}.$$

Осталось просуммировать эти выражения по k от 0 до n:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2}{4^n}. \qquad (1)$$

В числителе — сумма квадратов чисел соответствующей строки треугольника Паскаля. Например, при $n = 5$ получается:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1^2+5^2+10^2+10^2+5^2+1^2}{4^5}=\frac{252}{1024}=\frac{63}{256}\approx 0{,}246.$$

Способ II (хитрый). Перевернем второй столбик монет вверх тормашками и поставим его на первый. Если орлов в столбиках было поровну, то теперь в новом столбике орлов ровно половина. Обратно: если в удвоенном столбике ровно половина орлов, то, разделив столбик пополам и перевернув верхнюю половину, мы получим два столбика, где орлов поровну. Получается, что комбинаций из двух столбиков высотой n с одинаковым числом орлов столько же, сколько столбиков высотой $2n$, где орлов и решек поровну, то есть C_{2n}^n. Иными словами, мы перешли к серии Бернулли из $2n$ независимых испытаний, в которой нужно найти вероятность того, что успехов ровно n:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}=\frac{C_{2n}^n}{4^n}. \qquad (2)$$

При $n = 9$ (именно такую высоту обычно имел столбик монет у кассира в метро) получается около 0,185. Несложно понять, что эта вероятность убывает с ростом n, поскольку знаменатель растет быстрее числителя.

Очевидно, выражения (1) и (2) тождественно равны.

Рассуждение с перевернутым столбиком, к сожалению, годится только для симметричных монет. Оно существенно опирается на равновозможность орлов и решек в столбиках. Его нельзя обобщить на случай, когда вероятности p и $q = 1 - p$ орла и решки различаются. Не очень привлекательная внешне формула (1) универсальна. Она легко обобщается на случай $p \neq q$:

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 p^{2k}q^{2n-2k}. \qquad (3)$$

Вывод еще одной формулы для вероятности события A предложен в конце статьи в качестве упражнения.

При любом n вероятность события A оказывается наименьшей при $p=q=\frac{1}{2}$. Это очевидно для $n = 1$, несложно проверить для $n = 2$, но элементарное доказательство для произвольного n мне неизвестно. Эту задачу можно предложить хорошо подготовленным и интересующимся школьникам в качестве учебно-исследовательского проекта.

Приближенное решение с помощью формулы Муавра–Стирлинга[3]

При построении электронной таблицы (рис. 1) мы с успехом можем использовать стандартную функцию БИНОМРАСП для вычисления значения выражения (2).

	A	B	C	D	E
1		Задача кассира метро			
2					
3		n	Точная вероятность по ф. (2)	Прибл. значение по ф.(6)	Отклонение
19		16	0,140	0,141	0,0011
20		17	0,136	0,137	0,0010
21		18	0,132	0,133	0,0009
22		19	0,129	0,129	0,0008
23		20	0,125	0,126	0,0008
24		21	0,122	0,123	0,0007
25		22	0,120	0,120	0,0007
26		23	0,117	0,118	0,0006
27		24	0,115	0,115	0,0006
28		25	0,112	0,113	0,0006

Рис. 1

Оно с вычислительной точки зрения намного удобнее, чем (1), но все равно не обойтись без электронной техники. Всегда лучше иметь хотя бы и приближенную, но вычислительно несложную альтернативу. Воспользуемся формулой Муавра–Стирлинга:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}. \qquad (4)$$

Это равенство довольно точное в том смысле, что отношение правой и левой частей близко к единице. Например, для $n = 20$ (наибольшее n, для которого обычный процессор электронных таблиц умеет находить факториал точно) это отношение равно

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}}=1{,}0041\ldots,$$

то есть погрешность около 0,4%, и с ростом n она уменьшается. Абсолютная погрешность тоже невелика. При $n = 20$ она меньше одиннадцати ква-

[3] Абрахам де Муавр (1667–1754) — французский математик, эмигрировал в Англию в связи с преследованием гугенотов во Франции. Работал с Исааком Ньютоном и Джеймсом Стирлингом (1692–1770). Чаще формулу Муавра–Стирлинга называют просто формулой Стирлинга.

дриллионов, а это, в сущности, совершенный пустяк по сравнению с 20!.

Воспользуемся приближением (4) для всех факториалов в равенстве (2):

$$\mathrm{P}(A)=\frac{C_{2n}^{n}}{4^{n}}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!\cdot 4^{n}}\approx\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot\left(e^{n}\right)^{2}}{e^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{2}\cdot\left(n^{n}\right)^{2}\cdot 4^{n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \qquad (5)$$

В таблице на рисунке 1 показаны точные вероятности в столбце C, в столбце D — приближенные, найденные по формуле (5), а в столбце E — отклонения, то есть разность между числами в столбце D и C. Уже при $n = 18$ отклонение меньше 0,001.

Дополнение. О формуле Стирлинга

Обычно вывод формулы (4) в учебниках высшей школы либо опускают, либо приводят мелким шрифтом, используя кратчайший путь, опирающийся на комплексный анализ. Но Муавр и Стирлинг двигались иначе: они не выходили за рамки числовой прямой. Покажем один из возможных вариантов. Вывод сводится к доказательству двух фактов: во-первых, последовательность чисел $\frac{n!\cdot e^{n}}{n^{n}\sqrt{n}}$ при $n\to\infty$ имеет некоторый предел a, во-вторых, $a=\sqrt{2\pi}$.

1. (*Абрахам де Муавр*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot e^{n}}{n^{n}\sqrt{n}}\right)=a<\infty.$

Доказательство. Прологарифмируем факториал:

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n.$$

Представим сумму так, чтобы получились площади трапеций, которые выделены красным цветом на рисунке 2:

$$\ln n!=\frac{\ln 1+\ln 2}{2}+\frac{\ln 2+\ln 3}{2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\ln (n-1)+\ln n}{2}+\frac{1}{2}\ln n.$$

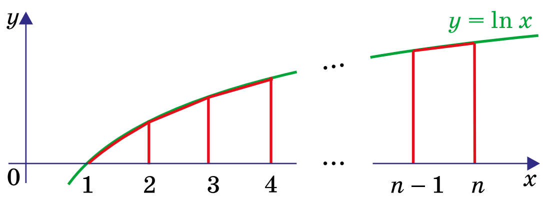

Рис. 2

В конце, правда, осталось «лишнее» слагаемое $\frac{1}{2}\ln n$. Площадь каждой трапеции заменим площадью криволинейной трапеции, заключенной под графиком функции $y = \ln x$:

$$\frac{\ln k+\ln (k+1)}{2}=\int\limits_{k}^{k+1}\ln x\,dx-s_{k}, \text{ где } k = 1, \ldots, n-1. \quad (6)$$

Интеграл больше площади трапеции за счет кривизны графика логарифма, поэтому образуется слагаемое s_k — площадь двуугольника (рис. 3).

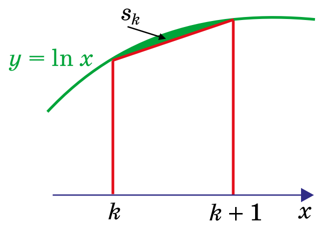

Рис. 3

Складывая равенства (6) и добавляя слагаемое $\frac{1}{2}\ln n$, получим:

$$\ln n!=\int\limits_{1}^{n}\ln x\,dx-S_{n}+\frac{1}{2}\ln n=n\ln n-n+1+\frac{1}{2}\ln n-S_{n}, \quad (7)$$

где сумма площадей всех двуугольников равна

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}.$$

Теперь покажем, что последовательность S_n имеет предел. Выразим s_k через k:

$$s_{k}=\int\limits_{k}^{k+1}\ln x\,dx-\frac{\ln k+\ln (k+1)}{2}=$$
$$=(x\ln x-x)\Big|_{k}^{k+1}-\frac{\ln k+\ln (k+1)}{2}=$$
$$=(k+1)\ln (k+1)-k\ln k-k-1+k-\frac{1}{2}\ln k-\frac{1}{2}\ln (k+1)=$$
$$=\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1.$$

Разложим функцию $\ln(1 + x)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\ln (1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\ldots$$

Радиус сходимости ряда равен 1, причем на интервале $0 < x < 1$ ряд сходится абсолютно[4], а в точке $x = 1$ — условно. Чтобы избежать трудностей, связанных с условной сходимостью, случай $k = 1$ рассмотрим отдельно:

$$s_{1}=\frac{3}{2}\ln 2-1.$$

При $k\geq 2$ ряд для $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ сходится абсолютно, и получается:

$$s_{k}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^{2}}+\frac{1}{3k^{3}}-\frac{1}{4k^{4}}+\ldots\right)-1=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k}-\frac{1}{4k^{2}}+\frac{1}{3k^{2}}+\frac{1}{6k^{3}}-\frac{1}{4k^{3}}-\frac{1}{8k^{4}}+\ldots\right)-1=$$
$$=\left(\frac{1}{3k^{2}}-\frac{1}{4k^{2}}\right)-\left(\frac{1}{4k^{3}}-\frac{1}{6k^{3}}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{12k^{2}}-\frac{2}{24k^{3}}+\frac{3}{40k^{4}}-\frac{4}{60k^{5}}+\ldots$$

[4] Напомним, что ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей слагаемых этого ряда. Ряд сходится условно, если он сходится, но ряд модулей расходится. Переставляя местами слагаемые в условно сходящемся ряде, можно нарушить сходимость или получить сходимость к какому-то другому числу.

В последнем преобразовании мы воспользовались тем, что в абсолютно сходящемся ряде можно произвольным образом переставлять слагаемые.

Чем дальше, тем коэффициенты при степенях $\frac{1}{k}$ меньше. Значит, s_k можно оценить сверху суммой сходящейся геометрической прогрессии:

$$s_k < \frac{1}{12k^2}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\ldots\right)=\frac{1}{12k^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k}}=\frac{1}{12k(k-1)}.$$

Последовательность S_n возрастает и ограничена сверху:

$$S_n < s_1+s_2+s_3+s_4+\ldots <$$

$$<\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{11}{12}.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует. Обозначим этот предел S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n!-n\ln n+n-\frac{1}{2}\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}(1-S_n)=1-S,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty} e^{\ln n!-n\ln n+n-\frac{1}{2}\ln n}=e^{1-S}=a.$$

Это значит, что при $n\to\infty$ последовательности $n!$ и $a\sqrt{n}\cdot n^n e^{-n}$ эквивалентны — под знаком предела одну можно заменять другой. Кроме того, при больших n можно пользоваться приближенным равенством

$$n!\approx a\sqrt{n}\cdot n^n e^{-n}, \qquad (8)$$

в котором нам пока неизвестно число a.

2. *(Джеймс Стирлинг)* $a=\sqrt{2\pi}$.

Доказательство. Запишем функцию $\sin x$ в виде бесконечного произведения:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

(Математика, 2023, № 2). Положим $x=\frac{\pi}{2}$:

$$1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\ldots=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{4\cdot 9}\cdot\ldots$$

Запишем бесконечное произведение в виде предела конечных произведений:

$$\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 2^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{4\cdot 3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2}\right)=1. \qquad (9)$$

В числителе каждый нечетный множитель встречается дважды, а четных множителей нет. Исправим это, умножив числитель и знаменатель на каждое четное число от 2 до $2n$, причем два раза. Получится (проверьте):

$$\frac{(2n)!\,(2n+1)!}{4^{2n}(n!)^4}=\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{4^{2n}(n!)^4}=\left(\frac{(2n)!\sqrt{2n+1}}{4^n(n!)^2}\right)^2.$$

Из (9) следует:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\sqrt{2n+1}}{4^n(n!)^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \qquad (10)$$

Формула (10) является одной из вариаций формулы Уоллиса. Того самого Джона Уоллиса, которого мы уже упоминали в статье «Задача стюардессы» (Математика, 2023, № 4). Заменим в (10) факториалы эквивалентным выражением (8):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n+1}}{4^n\left(a\sqrt{n}\cdot n^n e^{-n}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

После сокращений получается:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n}}{an}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

то есть

$$\frac{2}{a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad a=\sqrt{2\pi}.$$

Приближенное равенство (8) становится формулой Стирлинга:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}.$$

Получить асимптотическое равенство для задачи кассира можно без формулы Стирлинга, воспользовавшись непосредственно формулой Уоллиса (10), которая была получена лет на 80 раньше. Запишем ее иначе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{2n}^n\sqrt{2n+1}}{4^n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

откуда при больших n

$$\frac{C_{2n}^n}{4^n}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{\pi(n+0{,}5)}}. \qquad (11)$$

Правая часть несколько отличается от $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, но это несущественно, поскольку эти выражения эквивалентны при растущем n. Отдельно можно исследовать вопрос о том, какое из них является лучшим приближением. Не исключено, что (11) чуть точнее, чем (5).

Задачи для самостоятельного решения

1. В двух случайных столбиках по 20 монет. Есть еще два случайных столбика, по 40 монет в каждом. Во сколько приблизительно раз вероятность события «орлов поровну в первой паре» больше, чем вероятность события «орлов поровну во второй паре»?

2. Выведите еще одну формулу вероятности совпадения числа орлов в двух столбиках высотой n:

$$P(A)=\sum_{0\le k\le\frac{n}{2}} C_n^k C_{n-k}^k (pq)^{2k}\left(p^2+q^2\right)^{n-2k}.$$

3. Получите из равенства (9) равенство (10).

Окончание на с. 54.