XV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

Решения задач основного тура

Задачи предполагают полные решения. Один лишь ответ без решения оценивается нулем баллов. Около каждой задачи указано, от какого класса оргкомитет рекомендует задачу, но это только ориентир. Любой участник может решать любую задачу и получать за нее баллы. Баллы за задачи суммируются.

1. Ровесники (от 6 класса, 1 балл). Витя и Маша родились в одном и том же году в июне. Найдите вероятность того, что Витя хотя бы на один день старше Маши.

Ответ: $\frac{29}{60}$.

Решение. $\frac{1}{2}\cdot\frac{900-30}{900}=\frac{29}{60}\approx 0{,}483$.

2. Круглый стол короля Артура. Три рыцаря случайным образом рассаживаются на стулья, расставленные вокруг стола при дворе короля Артура. Какова вероятность того, что по обе стороны от каждого рыцаря окажется свободный стул, если:

а) стульев всего 7? **(От 6 класса, 1 балл)**.

б) стульев всего n? **(От 7 класса, 2 балла)**.

Ответ: а) $0{,}2$; б) $\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}$.

Решение. Решить задачу с семью стульями можно перебором. Решим задачу в общем случае (пункт б). При $n<6$ вероятность равна 0. Рассмотрим случай $n\geq 6$. Предположим для определенности, что один из этих рыцарей – сам король Артур, и он занял какое-то место. Тогда всего существует ровно C_{n-1}^2 способов рассадить еще двух рыцарей.

Представим, что справа от себя на соседний стул король положил свой шлем, и каждый рыцарь поступает так же: кладет свой шлем на стул справа от себя. Король и его шлем уже заняли какие-то два стула. Осталось две пары «рыцарь-шлем» и еще $n-6$ стульев, которым суждено остаться пустыми. Всего $n-4$ объекта, из которых нужно выбрать два места для двух рыцарей с их шлемами. Равновозможных способов сделать это C_{n-4}^2. Искомая вероятность равна

$$\frac{C_{n-4}^2}{C_{n-1}^2}=\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}.$$

В случае $n=7$ получаем ответ $\frac{1}{5}$ к пункту а).

3. Переполненные вагоны. Гистограмма (рис. 1) показывает распределение вагонов пассажирского состава по количеству пассажиров (в 4% вагонов пассажиров от 10 до 19, в 6% вагонов – от 20 до 29 и т.д.). Если в вагоне 60 пассажиров или больше, то назовем такой вагон *переполненным*.

а) **(от 6 класса, 1 балл).** Найдите долю переполненных вагонов.

б) **(от 6 класса, 2 балла).** Найдите наименьшую возможную долю пассажиров, едущих в переполненных вагонах.

в) **(от 6 класса, 2 балла).** Может ли доля пассажиров, едущих в переполненных вагонах, быть меньше доли переполненных вагонов?

Распределение вагонов по числу пассажиров

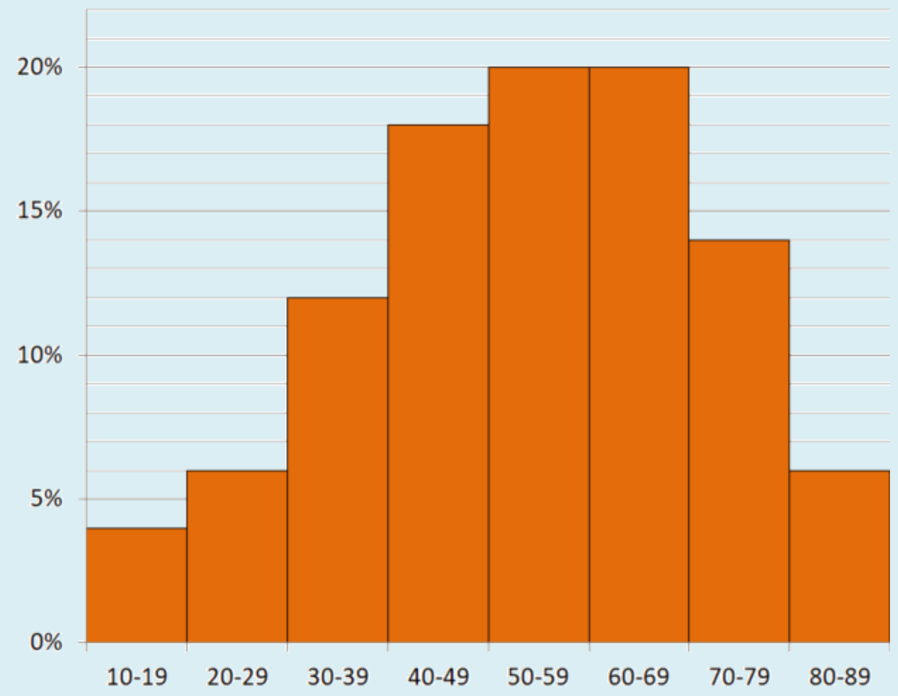


Рис. 1

Ответ: а) 40%; б) прибл. 49%; в) не может.

*Решение***.** б) Чтобы доля пассажиров в переполненных вагонах была как можно меньше, в них должно быть как можно меньше пассажиров, а в непереполненных — как можно больше. Пусть всего вагонов N. Найдем наибольшее возможное количество пассажиров в непереполненных вагонах:

$$19\cdot 0,04N+29\cdot 0,06N+39\cdot 0,12N+49\cdot 0,18N+59\cdot 0,2N=27,8N;$$

а затем наименьшее возможное количество пассажиров, ехавших в переполненных вагонах:

$$60\cdot 0,2N+70\cdot 0,14N+80\cdot 0,06N=26,6N.$$

Доля пассажиров в переполненных вагонах равна

$$\frac{26,6N}{26,6N+27,8N}=\frac{266}{544}\approx 0,49.$$

в) Предположим, что всего вагонов N, и в них едет n пассажиров, а переполненных вагонов M, и в них m пассажиров. Тогда в среднем в вагоне пассажиров $\frac{n}{N}$, а в переполненном $\frac{m}{M}$ пассажиров, и второе число не меньше (больше, если есть хотя бы один непереполненный вагон), чем первое:

$$\frac{n}{N}\le\frac{m}{M}, \text{ откуда } \frac{M}{N}\le\frac{m}{n}.$$

4. Метро в Анчурии (от 6 класса, 2 балла). В каждом из пяти городов Анчурии имеется метрополитен. На рисунке 2 показаны схемы линий метро в этих пяти городах. Некоторые сведения о метрополитенах Анчурии даны в таблице 1. Определите, к какому городу относится каждая схема.

Табл 1. Метрополитены в городах Анчурии

Город	Общая протяженность линий, км	Количество станций	Пассажиропоток в день, тыс. чел.	Средняя длина перегона между соседними станциями, км
Сан-Матео	39	20	100	1,5
Коралио	15	9	22	1,5
Аласан	16	9	20	2
Альфоран	18	9	30	2
Солитас	14	8	25	2

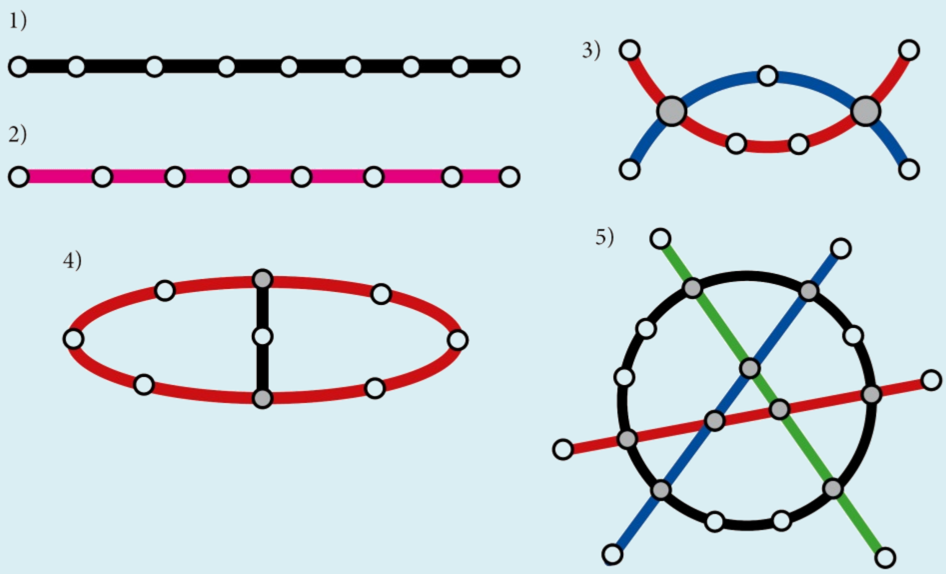


Рис. 2

Ответ: 1 – Аласан, 2 – Солитас, 3 – Альфоран, 4 – Коралио, 5 – Сан-Матео.

Решение. Зная протяженность линий и среднюю длину перегона между соседними станциями, найдем количество перегонов в каждом метрополитене и добавим эти данные в таблицу.

Город	Общая протяженность линий, км	Количество станций	Средняя длина перегона, км	Количество перегонов	Номер схемы
Сан-Матео	39	20	1,5	$39:1,5=26$	5
Коралио	15	9	1,5	10	4
Аласан	16	9	2	8	1
Альфоран	18	9	2	9	3
Солитас	14	8	2	7	2

Зная количество перегонов между станциями, найдем подходящую схему и её номер тоже занесём в таблицу.

5. Карточки (от 7 класса, 2 балла). Когда Витя был первоклассником, у него была касса цифр с 12 карточками: две карточки с цифрой 1, две карточки с цифрой 2 и так далее до цифры 6. Витя выложил их на стол в ряд в случайном порядке слева направо, а затем убрал первую единицу, первую двойку, первую тройку и так далее. Например, если у Вити сначала была последовательность 434653625112, то получилась бы последовательность 436512. Какова вероятность того, что у Вити на столе осталась последовательность 123456?

Ответ: $\frac{1}{720}$.

Решение. Общее число последовательностей, которые мог выложить Витя из 12 карточек, равно

$$C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 66 \cdot 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1.$$

Найдем, сколько последовательностей после удаления шести карточек по правилу Вити дают результат 123456. Будем восстанавливать удаленные числа и выделять восстановленные жирным шрифтом. Удаленная единица могла стоять только перед оставшейся единицей:

$$\mathbf{1}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ .$$

Поставить на место удаленную двойку можно уже тремя способами:

$$\mathbf{2}\,\mathbf{1}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6,\quad \mathbf{1}\ \mathbf{2}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\quad \text{или}\quad \mathbf{1}\ 1\ \mathbf{2}\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6.$$

В любом из этих случаев для стертой тройки ровно 5 равновозможных позиций. Рассуждая так и далее, получаем общее число способов восстановить цифры:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11.$$

Искомая вероятность равна $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 28 \cdot 45 \cdot 66} = \frac{1}{720} \approx 0{,}0014$.

6. Витины терзания (от 7 класса, 2 балла). У Вити в неделю пять уроков математики – по одному во все дни с понедельника по пятницу. Витя знает, что с вероятностью $1/2$ учитель во время учебной недели не проверит у него домашнее задание, а с вероятностью $1/2$ проверит, причем только на одном из уроков математики, зато не угадаешь когда – на любом уроке с равными шансами.

В конце урока математики в четверг Витя понял, что пока на этой неделе учитель так и не проверил у него домашнее задание. Какова вероятность того, что домашнее задание будет проверено в пятницу?

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Решение. Построим дерево этого случайного опыта (рис.3).

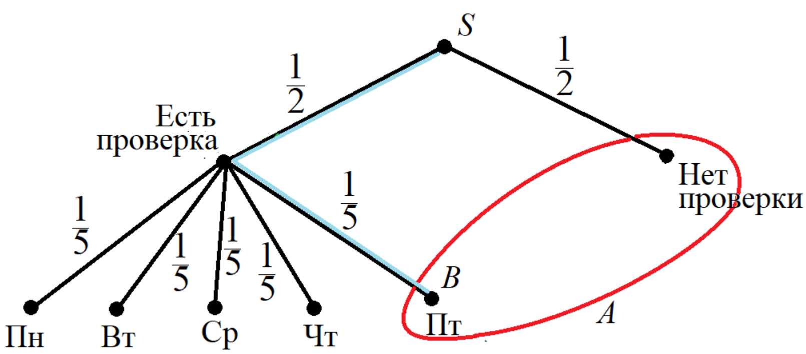
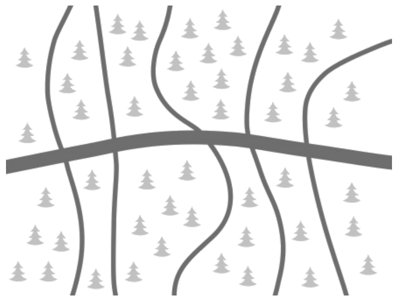


Рис. 3

Событие A «домашнее задание не проверено вплоть до четверга» означает, что либо на этой неделе проверки не будет вовсе (цепочка $S-$ «Нет проверки»), либо проверка будет в пятницу (событие B, изображенное цепочкой $S-$«Есть проверка»$-$Пт). Требуется найти вероятность события B при условии A, то есть «долю» цепочки $S-$Есть$-$Пт в событии A:

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(S-\text{Есть}-\text{Пт})}{\mathrm{P}(S-\text{Есть}-\text{Пт})+\mathrm{P}(S-\text{Нет})}=\frac{1/2\cdot 1/5}{1/2\cdot 1/5+1/2}=\frac{1}{6}.$$

7. Шоссе (от 7 класса, 3 балла). Шоссе, идущее с запада на восток, пересекается с n равнозначными дорогами, пронумерованными числами от 1 до n по порядку. По этим дорогам с юга на север и с севера на юг едут машины. Вероятность того, что машина подъедет к шоссе по каждой из дорог, равна $\frac{1}{n}$. Точно так же, вероятность того, что машина свернет с шоссе на каждую из дорог, равна $\frac{1}{n}$. Дорога, по которой машина покидает шоссе, не зависит от того, где эта машина въехала на шоссе.



Найдите вероятность того, что случайная машина, выехавшая на шоссе, минует k-й перекресток (проедет его насквозь или повернет на нем).

Ответ: $\frac{2kn-2k^2+2k-1}{n^2}$.

Решение. Указанное событие произойдет в одном из трех случаев.

1. Машина подъедет к шоссе по одной из дорог с номерами от 1 до $k-1$, а покинет шоссе по одной из дорог с номерами от k до n. Вероятность этого $\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n}$.

2. Машина подъедет по одной из дорог с номерами от $k+1$ до n, а покинет шоссе, повернув на одну из дорог с номерами от 1 до k. Вероятность этого $\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}$.

3. Машина повернет на шоссе с дороги с номером k.

Полная вероятность равна

$$\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2kn-2k^2+2k-1}{n^2}.$$

8. Одинокий шарик (от 8 класса, 2 балла). В 100 ящиков случайным образом кладут ровно 100 шариков. Какова вероятность того, что в последнем ящике окажется единственный шарик?

Ответ: прибл. 0,370.

Решение. Укладку шариков в ящики рассмотрим как серию из n независимых испытаний Бернулли. Успехом будем считать попадание шарика в последний ящик. Вероятность ровно одного успеха равна

$$C_n^1\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

Подставляя $n=100$, получаем $0{,}99^{99}\approx 0{,}3697$.

Замечание. Те, кто знаком с числом e и знает, что $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^x$, могут убедиться в том, что с ростом n число $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$ приближается к $\frac{1}{e}\approx 0{,}368$.

9. Две товарищеские серии (от 8 класса, 2 балла). Две футбольные команды А. и Б. одинаково хорошо играют в футбол. Тренеры договорились о двух товарищеских матчах. За победу в матче команде дается 2 очка, за ничью — 1 очко, при поражении — 0 очков. Вероятность ничьей в каждой встрече одинакова и равна p.

На следующий год прошла аналогичная товарищеская серия из двух матчей. Команды играли в том же составе, они были по-прежнему равной силы, но вероятность p выросла. Можно ли утверждать, что возросла вероятность того, что команды получат поровну очков?

Ответ. Нельзя.

Решение. В каждой встрече вероятности выигрыша и проигрыша каждой команды равны $(1-p)/2$. Обе команды наберут равные суммы очков, если оба матча закончились вничью или если в одном матче выиграла одна команда, а во втором – другая. Вероятность этого события можно представить как функцию $f(p)$, определенную на отрезке $[0;1]$:

$$f(p)=p^2+\frac{(1-p)^2}{2}=\frac{3p^2-2p+1}{4}.$$

На отрезке $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ квадратный трехчлен $3p^2-2p+1$ убывает. Поэтому при увеличении p вероятность равного количества баллов может уменьшиться, а не вырасти.

10. Таблетки от рассеянности (от 8 класса, 3 балла). В январе доктор дал Рассеянному Ученому упаковку с 10 таблетками от рассеянности. Ученый хранит таблетки в шкафчике. Когда Ученого одолевает приступ рассеянности (а это бывает несколько раз в неделю в случайные моменты времени), он открывает шкафчик, берет с полочки упаковку, принимает таблетку и смотрит, сколько всего таблеток от рассеянности у него осталось. Если Ученый видит, что у него осталась только одна таблетка, он немедленно заказывает точно такую же новую упаковку в аптеке с моментальной доставкой и тут же кладет ее в тот же шкафчик на ту же полочку.

Если Ученый видит, что очередная упаковка опустела, он тут же ее выбрасывает в мусорное ведро.

Какова вероятность того, что в 10 часов утра 31 декабря у Рассеянного Ученого в шкафчике будет ровно две упаковки с таблетками от рассеянности?

Ответ: прибл. 0,1998.

Решение. Больше двух упаковок у Ученого быть не может ни в какой момент. Действительно, он заказывает новую упаковку только тогда, когда осталась всего одна таблетка, а значит, у него в этот момент одна упаковка. Поэтому в каждый момент у него либо одна упаковка, либо две упаковки, в одной из которых одна таблетка.

Будем считать, что в новой упаковке n таблеток. После покупки новой упаковки общее число таблеток, хранящихся в упаковках, постепенно уменьшается с $n+1$ до 2 (приняв одну из двух последних таблеток, Ученый немедленно покупает новую упаковку, так что число таблеток моментально возрастает до $n+1$).

По прошествии длительного времени, скажем, в 10 часов утра 31 декабря, общее число таблеток может оказаться любым от 2 до $n+1$, причем с одинаковыми вероятностями, равными $p_k = \frac{1}{n}$ при $k = 2,...,n+1$, поскольку приступы рассеянности бывают в случайные моменты времени.

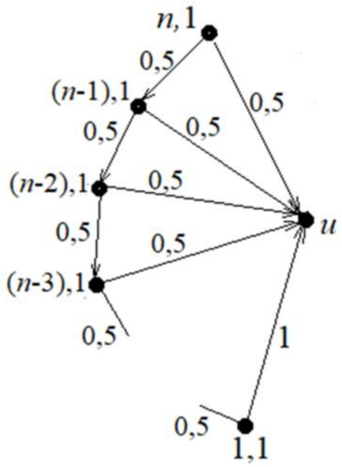


Рис.4

Ситуацию, когда в одной упаковке k таблеток, а в другой 1 таблетка, будем называть *состоянием* $k,1$. Еще есть состояние u, которое возникает, если у Ученого только одна упаковка. 31 декабря вероятность состояния $n,1$ совпадает с вероятностью того, что у Ученого ровно $n+1$ таблетка:

$$\mathrm{P}(n,1) = p_{n+1} = \frac{1}{n}.$$

Начав с состояния $n,1$, Ученый «перемещается» между состояниями по схеме, которая показана на графе (рис. 4). С помощью этого графа легко найти вероятности прочих состояний:

$$\mathrm{P}(n-1,1) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(n,1) = \frac{1}{2n}, \quad \mathrm{P}(n-2,1) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(n-1,1) = \frac{1}{2^2 n}, \ \ldots, \quad \mathrm{P}(1,1) = \frac{1}{2^{n-1}n}.$$

Вероятность события «у Ученого две упаковки» равна сумме вероятностей состояний от $n,1$ до $1,1$:

$$\mathrm{P}(n,1)+\mathrm{P}(n-1,1)+\ldots+\mathrm{P}(1,1) = \frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = \frac{2^n-1}{2^{n-1}n}.$$

При суммировании использована формула суммы первых членов геометрической прогрессии.

При $n=10$ искомая вероятность равна $\frac{1023}{5120} \approx 0{,}1998$.

11. Три треугольника (от 8 класса, 3 балла). Внутри треугольника ABC выбирают случайную точку M. Какова вероятность, что площадь одного из треугольников ABM, BCM и CAM окажется больше суммы площадей двух других?

Ответ: 0,75.

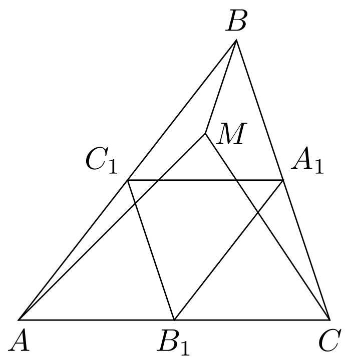


Рис.5

Решение. Проведем в треугольнике средние линии A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1. Чтобы площадь треугольника ACM оказалась больше половины площади треугольника ABC, точка M должна оказаться внутри треугольника A_1BC_1. Аналогично рассматриваются два других случая. Искомая вероятность равна

$$\frac{S_{AB_1C_1}+S_{B_1CA_1}+S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}.$$

12. Стефан Банах[1] и спички (от 8 класса, 4 балла). Неправдоподобная легенда гласит, что однажды в маленькой лавке в центре Львова Стефан Банах купил два коробка спичек и положил их в карман пиджака. В каждом коробке было 60 спичек.

Когда Банаху нужна спичка, он вынимает случайный коробок и берет из него спичку. В какой-то момент Банах достал коробок и обнаружил, что он пуст. Найдите математическое ожидание числа спичек в другом коробке.

Ответ: прибл. 7,795.

Решение, предложенное участницей олимпиады Александрой Нестеренко. Пусть в коробке n спичек. Банах взял коробок (назовем его для определенности красным) и обнаружил, что коробок пуст. Банах знает, что красный коробок он брал n раз, второй (синий) он мог брать k раз, где $0 \le k \le n$. Если Банах брал второй коробок k раз, в нем осталось $n-k$ спичек. Всего Банах брал спички из коробков $n+k$ раз с вероятностью взять спичку из синего коробка 0,5. Вероятность того, что второй коробок попался k раз из $n+k$ испытаний, равна

$$C_{n+k}^{k} \cdot \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Следовательно, математическое ожидание количества спичек во втором коробке равно

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)C_{n+k}^{k}}{2^{n+k}}.$$

Сумма $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+k}^{k}}{2^{n+k}}$ равна 1, поскольку это сумма вероятностей всех возможных исходов. Получается выражение

$$\mu = n - \sum_{k=0}^{n} \frac{kC_{n+k}^{k}}{2^{n+k}}.$$

Расчет можно провести по этой формуле с помощью электронных таблиц. Для $n = 60$ получается $\mu \approx 7,795$.

Комментарий. Решение можно продолжить и упростить полученное выражение. Преобразуем сумму:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{kC_{n+k}^{k}}{2^{n+k}} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n+k}^{k-1}}{2^{n+k}} = (n+1)\sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{n+1+m}^{m}}{2^{n+1+m}}.$$

В последнем равенстве сделана замена $m = k-1$. Полученная сумма похожа на сумму $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+k}^{k}}{2^{n+k}} = 1$, переписанную для $n+1$. Отличие в верхнем пределе суммирования. Воспользуемся этим:

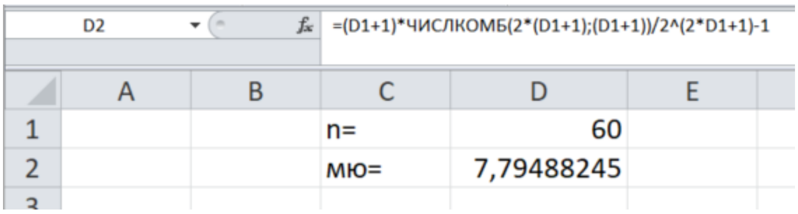
$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{n+1+m}^{m}}{2^{n+1+m}} = \sum_{m=0}^{n+1} \frac{C_{n+1+m}^{m}}{2^{n+1+m}} - \frac{C_{2n+1}^{n}}{2^{2n+1}} - \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+2}}.$$

[1] Стефан Банах – крупнейший математик XX века. Один из создателей функционального анализа. Задача о вероятности определенного числа оставшихся спичек известна под названием задачи Банаха о спичках. О задаче сообщил Гуго Штейнгауз. (В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., «Мир», 1963, с.174).

Первое слагаемое, как мы знаем, равно 1, а $C_{2n+1}^{n+1}=\frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}$. Получаем:

$$\mu=n-(n+1)\cdot\left(1-\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+1}}\right)=(n+1)\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+1}}-1.$$

На рисунке 6 показан расчет по этой формуле с помощью электронной таблицы.



D2 f_x =(D1+1)*ЧИСЛКОМБ(2*(D1+1);(D1+1))/2^(2*D1+1)-1

	A	B	C	D	E
1			n=	60	
2			мю=	7,79488245	

Рис. 6

Можно сделать еще один шаг, используя формулу Стирлинга $m!\approx\sqrt{2\pi m}\frac{m^m}{e^m}$. Проверьте, что $\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+1}}\approx\frac{2}{\sqrt{\pi(n+1)}}$. Тогда $\mu\approx2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}-1$. Расчет по этой приближенной формуле дает $\mu\approx7{,}813$, что весьма близко к истине.

13. Чистая плоскость (от 9 класса, 3 балла). Робот-пылесос “Orthogonal” решил пропылесосить координатную плоскость. Он выходит из точки O, расположенной в начале координат, и проходит по прямой расстояние X_1. В точке, куда он пришел, пылесос поворачивается и описывает окружность с центром в начале координат. Завершив окружность, он, не меняя направления, проходит по прямой расстояние X_2. Затем он снова поворачивается боком к началу координат, чтобы снова описать окружность с центром в начале координат, а завершив ее, проходит по прямой расстояние X_3. Таким образом он действует и дальше. Известно, что величины $X_1, X_2, X_3, \ldots$ подчиняются некоторому распределению с математическим ожиданием a и дисперсией d. Найдите математическое ожидание площади круга, ограниченного n-й окружностью, по которой прошел пылесос.

Ответ: $\pi n\left(d+a^2\right)$.

Решение. Исключим окружности из траектории пылесоса. Получается, что в каждой точке, куда он пришел после очередного шага, пылесос поворачивается так, что направление его движения образует прямой угол с направлением на начало координат (рис. 7). Поэтому после n-го шага квадрат расстояния R от пылесоса до начала координат можно найти по теореме Пифагора:

$$R^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2.$$

Площадь круга, ограниченного n-й окружностью, равна

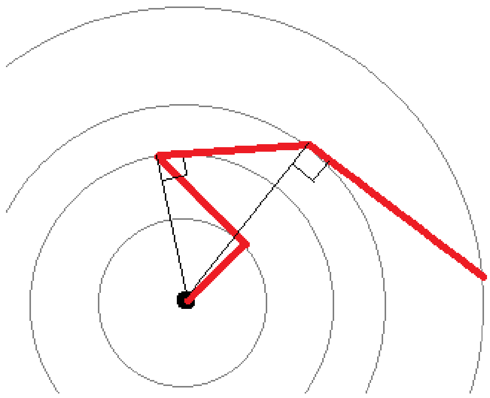


Рис. 7

$$S=\pi R^2=\pi\left(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2\right).$$

Поэтому

$$\mathrm{E}\,S=\pi\left(\mathrm{E}\,X_1^2+\ldots+\mathrm{E}\,X_n^2\right)=\pi n\,\mathrm{E}\,X_1^2=\pi n\left(\mathrm{D}\,X_1+\mathrm{E}^2\,X_1\right)=\pi n\left(d+a^2\right).$$

14. Лепидоптеролог (от 9 класса, 4 балла). Закончив писать книгу о степенных средних, Рассеянный Ученый решил заняться лепидоптерологией, то есть изучением бабочек. Он взял сачок и отправился на Суматру, где водится ровно n видов бабочек. Когда Ученый видит бабочку, он накрывает ее сачком, а уже потом рассматривает, поскольку зрение у Ученого не очень хорошее.

Пойманная бабочка может оказаться j-го вида с вероятностью p_j, где $j=1,\ldots,n$. Если бабочку такого вида Ученый еще не видел, то он ее тщательно измеряет, взвешивает, фотографирует, описывает и отпускает на волю. Если же бабочка такого вида уже встречалась, то Ученый отпускает ее сразу и ищет следующую бабочку.

Покажите, что через три дня такой охоты математическое ожидание числа видов бабочек, недостающих в описании Ученого, будет минимально возможным, если все вероятности p_j равны между собой.

Доказательство. Предположим, что за эти 3 дня Ученый поймал и отпустил всего k бабочек ($k>1$). Пусть $q_j=1-p_j$ – вероятность того, что пойманная бабочка принадлежит к виду, отличному от вида j. Очевидно, $q_1+q_2+\ldots q_n=n-1$. Введем индикаторы событий:

$$I_k=\begin{cases}1, \text{ если среди первых } k \text{ бабочек бабочки вида } j \text{ не было,}\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Математические ожидания индикаторов найти несложно: $\mathrm{E}I_j=q_j^k$.

Количество недостающих бабочек X равно сумме всех индикаторов. Перейдем в этой сумме к математическому ожиданию:

$$\mathrm{E}X=\mathrm{E}(I_1+I_2+\ldots+I_n)=q_1^k+q_2^k+\ldots+q_n^k.$$

Воспользуемся неравенством о средних (среднее степенное степени $k>1$ не меньше, чем среднее арифметическое):

$$\sqrt[k]{\frac{q_1^k+q_2^k+\ldots+q_n^k}{n}}\geq\frac{q_1+q_2+\ldots+q_n}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

Поэтому $\mathrm{E}X\geq n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k=\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все q_j равны между собой, и, значит, все p_j тоже одинаковы.

15. Наименьшая сумма (от 9 класса, 4 балла). Есть очень много симметричных игральных кубиков. Их бросают одновременно. При этом с некоторой вероятностью $p>0$ может получиться сумма очков 2022. Какова наименьшая сумма очков, которая может выпасть при бросании этих кубиков с той же вероятностью p?

Ответ: 337.

Решение. Распределение суммы, выпавшей на кубиках, симметрично. Чтобы сумма S была наименьшей возможной, сумма 2022 должна быть наибольшей возможной. Значит, сумма 2022 достигается при выпадении шестерок на всех кубиках. Следовательно, кубиков всего $2022:6=337$. Наименьшая сумма 337 получается, если на всех кубиках выпадут единицы.

16. Лишние крокодилы (от 9 класса, 6 баллов). Производитель шоколадных яиц с игрушкой внутри объявил, что выпускается новая коллекция, в которой десять разных крокодилов. Крокодилы равномерно и случайно распределены по шоколадным яйцам, то есть в случайно выбранном яйце каждый из крокодилов может оказаться с вероятностью 0,1. Леша захотел собрать полную коллекцию. Каждый день мама покупает ему одно шоколадное яйцо с крокодилом.

Сначала в коллекции Леши появился крокодил в очках, затем – крокодил с газетой. Третьим экземпляром, какого не было прежде, стал крокодил с тростью. Найдите математическое ожидание случайной величины «количество крокодилов с тростью, которые оказались у Леши к моменту, когда у него образовалась полная коллекция».

Ответ: прибл. 3,59.

Решение. Будем считать, что всего в коллекции n крокодилов. Пронумеруем экспонаты в том порядке, в каком они появлялись в коллекции. Например, крокодил в очках был первым, поэтому это крокодил вида 1. Через какое-то количество попыток появился крокодил вида 2, какого еще не было (с газетой), и так далее.

Рассмотрим момент, когда в коллекции появился k-й крокодил. Нас интересует математическое ожидание количества крокодилов этого же вида, которые будут куплены до завершения коллекции.

Начиная с момента, когда появился k-й крокодил, потребуется φ_k покупок, чтобы появился следующий отсутствующий доныне экспонат (номер $k+1$). Вероятность того, что он появится в каждой отдельной попытке, равна $\frac{n-k}{n}$. Поэтому $\mathrm{E}\varphi_k = \frac{n}{n-k}$, а количество появившихся попутно «лишних» крокодилов будет равно в среднем

$$\mathrm{E}\varphi_k - 1 = \frac{n}{n-k} - 1 = \frac{k}{n-k}.$$

Из этих лишних $\frac{k}{n-k}$ крокодилов сколько-то (пусть ξ_k) принадлежит виду k, а поскольку в каждой попытке каждый из k видов лишних крокодилов появляется с равными шансами,

$$\mathrm{E}\xi_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{n-k} = \frac{1}{n-k}.$$

Аналогично, между экспонатами номер $k+1$ и $k+2$ появится в среднем

$$\mathrm{E}\varphi_{k+1} - 1 = \frac{n}{n-k-1} - 1 = \frac{k+1}{n-k-1}$$

лишних крокодилов, из них в среднем $\mathrm{E}\xi_{k+1} = \frac{1}{n-k-1}$ относятся к виду k, и так далее.

Следовательно, общее число X_k лишних крокодилов вида k равно

$$X_k = \xi_k + \xi_{k+1} + \xi_{k+2} + \ldots + \xi_{n-1},$$

а математическое ожидание этой величины равно

$$\mathrm{E}X_k = \frac{1}{n-k} + \frac{1}{n-k-1} + \ldots + 1 = H_{n-k},$$

где буквой H обозначено гармоническое число: $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$.

Добавляя ко всем этим лишним крокодилам k-го вида первого такого крокодила, (нелишнего), находим, что среднее число таких крокодилов равно $H_{n-k} + 1$.

В условиях задачи $n = 10, k = 3$, поэтому ожидаемое число крокодилов с тростью, то есть крокодилов 3-го вида, равно $H_7 + 1 \approx 2,59 + 1 = 3,59$.

Замечание. Известно, что $H_m \approx \ln m + \gamma$, где $\gamma = 0,577\,215\,664\ldots$ — константа Эйлера-Маскерони. Пользуясь этой формулой, найдем:

$$\mathrm{E}\, X_k + 1 \approx \ln 7 + 0,578 + 1 \approx 3,524.$$

Точность приемлемая.