XVIII Заочная интернет-олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

1 декабря 2024 г. – 12 января 2025 г.

Решение задач

1. Неопытный бухгалтер. Учительница математики О. устроилась бухгалтером в фирму, в которой 500 сотрудников, получающих деньги наличными. Когда пришла пора выдавать зарплату, О. аккуратно до копейки подсчитала на компьютере зарплату каждого сотрудника. Получив в банке соответствующую сумму, О. начала выдавать зарплату. Поскольку монет меньше рубля в ходу нет, О. округляла каждую сумму до рубля по обычным правилам, которым много лет учила шестиклассников. Но в конце денег немного не хватило, и разницу О. была вынуждена компенсировать из своего кармана. О. поняла, что это случилось из-за округления, и не расстроилась, решив, что это чистая случайность, и в другой раз, напротив, небольшая сумма останется. Но и в следующие три месяца повторилась та же история.

а) **(от 6 класса, 1 балл).** Почему так получилось?

б) **(от 6 класса, 1 балл).** Как можно было округлять, чтобы такого не произошло?

в) **(от 9 класса, 2 балла).** Найдите математическое ожидание суммы, которую О. приходится ежемесячно доплачивать из своего кармана.

Ответ: б) 2 р. 50 коп.

Решение. Пусть зарплата сотрудника равна x рублей и y копеек. Округление не нужно, только если $y = 0$, то есть в одном случае из 100. Оставшиеся 99 равновозможных случаев делятся не поровну. В 49 случаях – когда $y = 1, 2, \ldots, 49$ – округление происходит вниз. Еще в 49 случаях – когда $y = 51, 52, \ldots, 99$ – округление происходит вверх, в среднем на ту же сумму. В одном случае, а именно, когда $y = 50$, округление тоже происходит вверх на 50 копеек, но не по объективной причине, а просто в силу договорённости, ведь 50 копеек равноудалены от 0 рублей и от 1 рубля. Именно это немотивированное округление 50 копеек вверх в среднем в одном случае из 100 даёт систематическую ошибку, которая в расчете на 500 человек приводит к средней недостаче $5 \cdot 50$ копеек, то есть 2 р. 50 коп. Таким образом, причина систематической положительной недостачи действительно кроется в округлении, которое происходит с большей вероятностью вверх, чем вниз.

Избежать смещения можно, если принять правило округления, при котором $\mathrm{E}X = 0$. Часто округляют «к чётной цифре». Например, суммы 50123 р. 23 коп, 50124 р. 96 коп. и 50124 р. 13 коп. округлятся одинаково – до 50124 р., поскольку число 50124 оканчивается чётной цифрой, а числа 50123 и 50125 – нечётной. Нечетная сумма в результате может получиться, только если округление не требуется вовсе. Другой способ – округлять в сторону нечётной цифры. Можно округлять случайным образом, например, бросая монетку. Если выпал орёл, то округлять вверх, если решка – то вниз. Проверьте, что эти три способа дают нулевую среднюю ошибку.

По сути, мы уже нашли математическое ожидание величины X «*недостача в копейках*». Точное выражение получим, если примем, что $X = 0$ коп. при $y = 0$ коп, $X = -500y$ при $y = 1, 2, \ldots, 49$ коп, $X = 500 \cdot 50$ коп. при $y = 50$ коп. и $X = 500(100 - y)$ при $y = 51, 52, \ldots, 99$ коп.:

$$\mathrm{E}X = 0 \cdot 0{,}01 - 500 \cdot (1 + \ldots + 49) \cdot 0{,}01 + 500 \cdot 50 \cdot 0{,}01 + 500 \cdot (1 + \ldots + 49) \cdot 0{,}01 = 500 \cdot 50 \cdot 0{,}01 = 250.$$

2. Уровень воды (от 6 класса, 2 балла). На уроке статистики Коле и Вале дали для обработки один и тот же большой массив, состоящий из замеров уровня воды в реке в их городе относительно многолетнего среднего уровня. Данные находились в диапазоне от -163 до 227 см. Чтобы найти средний уровень, Коля сгруппировал данные в интервалы по 5 см, а Валя – в интервалы длиной 3 см. Ни у Коли, ни у Вали пустых интервалов не было. Пользуясь серединами своих интервалов, Коля нашел среднюю глубину, и у него получилось 14 см. Валя сделала то же самое, пользуясь серединами своих интервалов, и у нее получилось 10 см. Докажите, что хотя бы один из них ошибся.

Доказательство. Погрешность Колиных вычислений, полученная за счет группировки, не может превосходить половины длины интервала группировки, то есть она не больше чем 2,5 см. Аналогично, погрешность Валиных вычислений не больше чем 1,5 см. Различие же между их оценками равно 4 см. Это значит, что и Коля, и Валя получили наибольшую возможную погрешность: Коля в большую сторону, а Валя – в меньшую. Таким образом, все значения оказались на левых границах Колиных интервалов и на правых границах Валиных. Значит, правые границы всех Валиных интервалов совпадают с левыми границами Колиных, но этого не может быть, поскольку у них интервалы разной длины.

3. Премия. Директор небольшого подразделения крупной компании получил на свое подразделение месячный премиальный фонд 80 тыс. рублей. Он решил распределить деньги между сотрудниками так, чтобы в этом месяце медианная выплата (оклад плюс премия) сотрудников в его подразделении оказалась как можно выше (согласно политике компании, рейтинг директора зависит от медианного дохода его подразделения – чем выше, тем лучше).

а) **(от 6 класса, 1 балл).** В подразделении 11 сотрудников. Какими могут быть их оклады, если медианную выплату с учетом премии удаётся увеличить на всю сумму, то есть на 80 тыс. р.? Приведите пример подходящего распределения окладов.

б) **(от 7 класса, 4 балла).** В таблице показаны оклады каждого из 11 сотрудников подразделения. Найдите наибольшее возможное значение медианной выплаты сотрудникам в этом месяце.

Количество сотрудников	1	2	4	2	1	1
Оклад, тыс. р.	60	70	80	90	110	120

Ответ: а) Например, шестеро получают по 50 тыс. р. и пятеро по 130 тыс. р.; б) 105 тыс. р.

Решение. а) Пример: шестеро получают по 50 тыс. р., а еще пятеро – по 130 тыс. р.

б) Назовём сотрудника *низко-*, *средне-* или *высокооплачиваемым*, если его оклад соответственно ниже, равен или выше медианного значения 80 тыс. р. Предположим, что после выплаты премии медианная выплата оказалась m тыс. р. Это значит, что хотя бы шесть сотрудников получили на руки не меньше, чем m тыс. р. Если их больше шести, то среди них найдётся один премированный низко- или среднеоплачиваемый сотрудник. Если у него отобрать его премиальную надбавку, то ее можно распределить между остальными премированными так, что медианная выплата, во всяком случае, не станет меньше. Значит, можно считать, что всего премированных не больше шести, а премиальный фонд должен быть распределен между двумя среднеоплачиваемыми и каким-то количеством высокооплачиваемых сотрудников.

Если кто-то из премированных получит выплату больше, чем m тыс. р., то это тоже окажется не оптимальным решением – за счёт разницы можно еще увеличить (по крайней мере, не уменьшить) медиану выплат. Значит, каждый премированный с окладом $a \le m$ тыс. р. должен получить $m-a$ тыс. р. премии, а без премии останутся низкооплачиваемые, двое среднеоплачиваемых и те из высокооплачиваемых, чей оклад не меньше, чем m тыс. р.

Из этих рассуждений следует, что ранжирование сотрудников по уровню оплаты не изменится после премирования – если оклад у А. не больше, чем у Б., то и итоговая выплата у А. окажется не больше.

Чтобы понять, как распределить премию и найти m, построим диаграмму окладов и премий в порядке их возрастания.

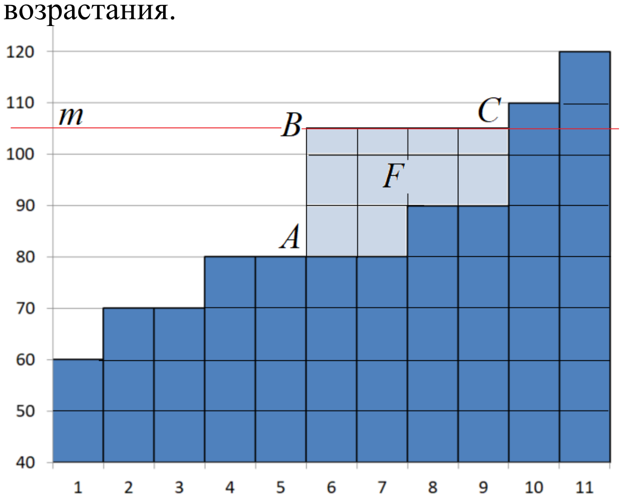

Рис. 1. Оклады и премия

Премия показана светлой фигурой F, ограниченной сверху ломаной ABC. Площадь фигуры F, то есть сумма высот столбиков, составляющих фигуру F, должна равняться 80 тыс. р.

Если $m=100$ тыс. р., то площадь фигуры F равна 60 тыс. р. Мало. Если $m=110$ тыс. р., то площадь фигуры F равна 100 тыс. р. Много. Значит, значение m заключено между 100 и 110 тыс. р., премированы только два среднеоплачиваемых и два высокооплачиваемых сотрудника с окладом 90 тыс. р. Значение m найдем из уравнения

$$2\cdot(m-80)+2\cdot(m-90)=80;$$

Получаем, что $m=105$ тыс. р.

4. Средний балл (от 6 класса, 2 балла). В некотором регионе средний балл на ЕГЭ в каждой школе вырос, а средний балл во всем регионе снизился по сравнению с прошлым годом. Как это оказалось возможно?

Решение. Объясним, как такое возможно, на примере, в котором всего две школы и шесть выпускников, баллы которых на ЕГЭ такие, как показано в таблице.

<table>
<tr><th></th><th>Школа А</th><th>Школа Б</th><th>Средний балл по всей совокупности</th></tr>
<tr><td>Выпускник 1 прошлого года</td><td>60</td><td>30</td><td rowspan="4">40</td></tr>
<tr><td>Выпускник 2 прошлого года</td><td>51</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Выпускник 3 прошлого года</td><td>48</td><td>21</td></tr>
<tr><td>Средний балл</td><td>53</td><td>27</td></tr>
</table>

Как видим, результаты выпускников школы А в целом намного выше, чем у выпускников школы Б. В этом году когорты выпускников изменились слабо. В школе А уровень подготовки вовсе не изменился, но в начале года по каким-то причинам средний по уровню подготовки выпускник 2 (уровень 51) перешел в школу Б, где теперь стало 4 выпускника, но один из них очень слабый (уровень 9)

	Школа А	Школа Б	Средний балл по всей совокупности
Выпускник 1 этого года	60	30	
Выпускник 2 этого года		30	
Выпускник 3 этого года	48	51 (из школы А)	38
Выпускник 4 этого года		9	
Средний балл	54	30	

Мы наблюдаем парадоксальную картину, которая описана в условии – средний балл в каждой школе вырос, а в целом по обеим школам снизился. Рост в школе А и в школе Б связан с переходом одного выпускника, который слабее среднего уровня в школе А, но сильнее среднего уровня в школе Б. Общее падение по обеим школам связано с появлением одного слабого выпускника в школе Б.

Примечание. Такая ситуация может показаться невероятной. На самом деле ничего невозможного здесь нет. В истории зафиксировано много подобных явлений (см., например, австралийский парадокс). Они курьезны и предостерегают нас от поспешных выводов. Предположим, что в этом регионе в прошлом году была введена электронная система подготовки к ЕГЭ. Департамент образования интересуется, как это нововведение повлияло на результаты выпускников. Статистика обескураживает – оно оказалось «полезным для каждой школы» и «вредным в целом для региона». Без анализа значимости[1] влияния нововведения серьезные выводы делать нельзя.

5. Автобусные маршруты (от 6 класса, 3 балла). В тридевятом царстве ровно 50 городов. Они связаны между собой дорогами, причем из каждого города выходит нечётное число дорог, и из каждого города по дорогам можно добраться в любой другой. Докажите, что можно по этим дорогам пустить ровно 25 автобусных маршрутов так, что по каждой дороге будет ходить автобус только одного маршрута.

Автор А. Медведева

Решение. Рассмотрим граф городов и дорог. Пронумеруем вершины числами от 1 до 50 в каком-нибудь порядке и добавим по одному ребру между вершинами 1 и 2, вершинами 3 и 4 и так далее до ребра между вершинами 49 и 50. Если какие-то две вершины уже были связаны, свяжем их еще раз. Получившийся граф по-прежнему связен, и в нем все вершины имеют четную степень, а значит, в нем есть эйлеров цикл, который по разу проходит через каждое ребро. Построим этот цикл и удалим из него ребра, которые были добавлены. Цикл распадется на 25 цепей, которые не пересекаются по ребрам, но могут иметь общие вершины. По каждой из этих цепей пустим один автобусный маршрут. Полученная маршрутная сеть удовлетворяет условиям задачи: маршрутов 25, и каждая дорога включена ровно в один маршрут.

6. Средний квадрат разностей (от 8 класса, 3 балла). У Квантика был числовой массив из 50 чисел. Дисперсия массива равнялась 98. Ноутик взял каждую пару чисел из массива Квантика и нашел разность этих чисел. Получился новый массив. Найдите средний квадрат чисел массива Ноутика.

Ответ: 200.

[1] Под значимостью фактора можно понимать вероятность того, что наблюдаемые изменения обусловлены этим фактором, а не просто случайны.

Решение. Пусть у Квантика был массив $x=\{x_1,\dots,x_n\}$. Тогда у Ноутика получился массив y разностей вида x_j-x_k. Знаки разностей нам не важны, поэтому будем считать, что $j<k$.

$$y=\{x_1-x_2,\, x_1-x_3,\, \dots,\, x_1-x_n,\, x_2-x_3,\, \dots,\, x_j-x_k,\dots,\, x_{n-1}-x_n\}.$$

Запишем средний квадрат $\overline{y^2}$ чисел массива y:

$$\overline{y^2}=\frac{(x_1-x_2)^2+\ldots+(x_j-x_k)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2}{C_n^2}.$$

Возведем в квадрат все разности. Число x_1^2 встречается в этой сумме $n-1$ раз. Точно так же, ровно $n-1$ раз встречаются все прочие квадраты $x_2^2,\dots,x_n^2$. Кроме того, в числителе окажутся всевозможные удвоенные произведения со знаком минус:

$$\overline{y^2}=\frac{(n-1)\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(2x_1x_2+2x_1x_3+\ldots+2x_jx_k+2x_{n-1}x_n\right)}{C_n^2}.$$

К удвоенным произведениям добавим еще один комплект квадратов и вычтем его же, чтобы не изменить значение:

$$\overline{y^2}=\frac{n\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(x_1^2+\ldots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\ldots+2x_jx_k+2x_{n-1}x_n\right)}{C_n^2}.$$

Вторая сумма равна квадрату суммы всех чисел:

$$\overline{y^2}=\frac{n\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(x_1+x_2\ldots+x_n\right)^2}{C_n^2}=2\cdot\frac{n\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(x_1+x_2\ldots+x_n\right)^2}{n(n-1)}=$$
$$=2\cdot\frac{n\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)-n^2\overline{x}^2}{n(n-1)}=2\cdot\frac{\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)-n\overline{x}^2}{n-1}=\frac{2nS_x^2}{n-1}.$$

Здесь символами $\overline{x}$ и S_x^2 обозначены, как обычно, среднее арифметическое и дисперсия массива x. При $n=50$ и $S_x^2=98$ получается:

$$\overline{y^2}=\frac{2\cdot 50\cdot 98}{49}=200.$$

7. Девять коробок (от 8 класса, 3 балла). Перед игроком девять закрытых коробок. В трёх случайных коробках призы, а шесть коробок пустые. Игрок по очереди открывает две коробки на свой выбор. Если в обеих призы, то игрок побеждает и забирает оба приза. Если это не так, открытые коробки закрывают, а игроку даётся следующая попытка. При этом положение коробок и призов в них не меняется. Найдите вероятность того, что при правильной игре игрок выиграет призы не более чем с трёх попыток.

Автор А. Акимов

Ответ: $\frac{53}{84}\approx 0{,}631$.

Решение. Найдем вероятность события A «*трех попыток не хватит*». Если в ходе двух попыток игроку удалось открыть две коробки с призами, то либо он получил приз с первой попытки, либо третья попытка будет наверняка удачной – ведь он помнит, в каких коробках лежат найденные им призы. Значит, событие A наступает в двух случаях.

1. Не известно положение ни одного приза, то есть все четыре открытые коробки пусты. Вероятность этого равна $\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{42}$. При этом следующая попытка будет безуспешной с вероятностью $1-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{7}{10}$ (хотя бы в одной из открытых коробок приза нет).

2. Известно, где лежит ровно один из призов. Вероятность этого равна

$$\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{10}{21}$$

(положение дроби с числителем 3 показывает, в какой именно по счёту открытой коробке найден приз). При этом третья попытка будет неудачной, если первая же открытая коробка окажется пустой. Вероятность этого равна $\frac{3}{5}$.

По формуле полной вероятности получаем:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{42}\cdot\frac{7}{10}+\frac{10}{21}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{84}+\frac{24}{84}=\frac{31}{84}.$$

Следовательно, вероятность противоположного события «*трех попыток достаточно»* равна $1-\frac{31}{84}=\frac{53}{84}\approx 0,631$.

8. Дешевые участки (от 8 класса, 4 балла). Компания «Твой гектар» продаёт квадратные участки земли. Каждый участок имеет площадь не меньше одного гектара (1 га равен 10000 кв. м.) и по периметру обносится забором. Средняя длина забора, огораживающего участок, оказалась равна 1000 м, а средняя площадь участка оказалась меньше, чем 10 гектаров. Могло ли получиться так, что доля участков площадью 1 га оказалась равна 65%?

Ответ: не могло.

Решение. Пусть всего участков n. Уменьшим сторону каждого на 100 м. Тогда «единичные» участки станут «нулевыми». Длины сторон уменьшенных квадратов пусть равны $x_1,\dots,x_n$ м. Нас интересует доля нулей среди этих чисел.

При уменьшении сторон средняя длина уменьшилась с 250 м до 150 м, но дисперсия длин не изменилась. Она была меньше, чем $100000-250^2=37500$ кв. м, и осталась меньше этой величины:

$$\overline{x^2}-\overline{x}^2<37500, \text{ откуда } \overline{x^2}<37500+22500=60000.$$

Пусть среди чисел $x_1,\dots,x_n$ только k ненулевых (для определенности пусть это k первых чисел). Рассмотрим их дисперсию. Она, во всяком случае, неотрицательна:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}{k}-\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}\right)^2\geq 0.$$

Получаем: $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}{k}-\left(\frac{150n}{k}\right)^2\geq 0$, откуда $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}{n}\geq\frac{k}{n}\left(\frac{150n}{k}\right)^2=150^2\frac{n}{k}$.

Левая часть равна среднему квадрату всех чисел, а потому меньше, чем 60000. Получаем:

$$150^2\frac{n}{k}<60000, \text{ откуда } \frac{k}{n}>\frac{3}{8},$$

то есть доля ненулевых значений в массиве $x_1,\dots,x_n$ больше, чем 37,5%, а доля нулевых меньше, чем 62,5%.

9. Угадай последовательность (от 8 класса, 2 балла). На уроке теории вероятностей учитель бросает игральный кубик 4 раза. Результаты бросков видны только Коле. Затем учитель предлагает ученикам игру: побеждает тот, кто угадает последовательность выпавших чисел не более чем с одной ошибкой (одно неверное число). Игра идет втемную: никто из игроков не видит, что предлагают соперники. Судит игру Коля, поскольку только он знает выпавшую последовательность. Какова вероятность того, что из 20 учеников, принявших участие в игре, хотя бы один окажется победителем?

Автор А. Медведева

Ответ: прибл. $0,279$.

Решение. Вероятность угадать все числа равна $\left(\frac{1}{6}\right)^4$. Вероятность допустить одну ошибку равна $4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}$. Таким образом, вероятность оказаться победителем для каждого игрока равна $p=\left(\frac{1}{6}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}=\frac{7}{432}$. Вероятность противоположного события равна $q=\frac{425}{432}$. Значит, вероятность того, что ни один из 20 участников не выиграет, равна $q^{20}=\left(\frac{425}{432}\right)^{20}\approx 0,721$. Вероятность противоположного события «*будет хотя бы один победитель*» приближенно равна $0,279$.

10. Два случайных выбора (от 8 класса, 2 балла). В n коробках лежат шары – в каждой коробке ровно один белый шар и какое-то количество черных, причем не во всех коробках черных шаров поровну. Можно сделать одно из двух.

1. Ссыпать все шарики в одну коробку и выбрать из нее один случайный шарик.
2. Выбрать случайную коробку и вытащить из нее случайный шарик.

При каком способе выбора вероятность получить белый шарик больше?

Ответ: при втором.

Решение. Пусть в n коробках $x_1,\dots,x_n$ шариков соответственно. При первом способе вероятность события A «*белый шарик*» равна $\frac{n}{x_1+\ldots+x_n}=\frac{1}{A_x}$, где A_x – среднее арифметическое набора $x=\{x_1,\dots,x_n\}$. При втором способе вероятность события A «*белый шарик»* равна $\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{G_x}$, где G_x – среднее гармоническое этого же набора. Известно, что если числа x_k положительны, то $A_x\geq G_x$, причем равенство возможно, только если все числа x_k совпадают. Но черных шариков не поровну, значит, $\frac{1}{G_x}>\frac{1}{A_x}$, то есть при втором способе вероятность получить белый шарик больше.

11. Наибольший средний квадрат (от 8 класса, 3 балла). Числовой набор состоит из 25 неотрицательных чисел, его среднее арифметическое равно 3, а медиана равна 1. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического квадратов этих чисел.

Ответ: 159,24.

Решение. **Лемма**. Пусть $0 \le \varepsilon \le a \le b$. Тогда $a^2+b^2 \le (a-\varepsilon)^2+(b+\varepsilon)^2$, причем равенство возможно, только если $\varepsilon = 0$. Доказательство проводится прямой выкладкой:

$$a^2+b^2 \le a^2+b^2+2\varepsilon^2+2(b-a)\varepsilon=(a-\varepsilon)^2+(b+\varepsilon)^2.$$

Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Все числа в наборе по условию неотрицательны, поэтому наибольшее число не может превосходить 75. Значит, средний квадрат чисел набора не может быть сколь угодно большим.

Рассмотрим набор $\{x_1,...,x_{12},1,y_{14},...,y_{25}\}$, в котором числа упорядочены: $0 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_{12} \le 1 \le y_{14} \le ... \le y_{25}$, среднее арифметическое равно 3.

Если какое-то число x_k больше нуля, то заменим его нулем, а к числу y_{25} прибавим x_k. В силу леммы получим набор, в котором сумма квадратов чисел больше, чем была, а медиана и среднее арифметическое прежние. Значит, в искомом наборе $x_1 = x_2 = ... = x_{12} = 0$.

Пусть теперь какое-то из чисел $y_{14},....,y_{24}$ больше единицы: $y_m > 1$. Заменим это число единицей, а к числу y_{25} прибавим число $y_m - 1$. В силу леммы получим набор, в котором сумма квадратов стала больше, а медиана и среднее арифметическое прежние. Значит, в искомом наборе $y_{14} = y_{15} = ... = y_{24} = 1$.

Таким образом, наибольшую сумму квадратов имеет набор, который состоит из 12 нулей, 12 единиц и числа y_{25}. Это последнее число должно равняться 63, тогда сумма квадратов равна 3981, а средний квадрат равен 159,24.

Ответ: 159,24

12. Нелюдимые разбойники. Всего в банде 146 разбойников. Известно, что если двое разбойников в этой банде знакомы друг с другом, то в этой же банде найдется разбойник, которого они оба не знают.

а) **(от 8 класса, 2 балла).** Назовем разбойника нелюдимым, если в банде найдутся хотя бы двое, кого он не знает. Может ли быть так, что в этой банде ровно двое нелюдимых разбойников?

б) **(от 8 класса, 4 балла).** Докажите, что в банде найдется разбойник, который не знаком хотя бы с 13 другими.

Ответ: а) нет.

Решение. Построим граф *незнакомств*: две вершины связаны ребром тогда и только тогда, когда соответствующие лица не знают друг друга. Из условия следует, что если между двумя вершинами нет ребра (двое знакомы), то эти вершины имеют общую смежную вершину (общий незнакомец), то есть любые две вершины соединены либо ребром, либо цепью длины 2.

а) Пусть ровно две вершины a и b (нелюдимые) имеют степень 2 или больше. Пусть вершина a соединена с вершиной c, отличной от b, а вершина b – с вершиной d, отличной от a. Вершины c и d имеют степень 1, поэтому они не совпадают и к ним не примыкают другие ребра. Значит, между этими вершинами не может быть более короткого пути, чем цепь $cabd$ длины 3. Противоречие.

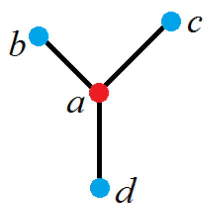

Рис. 2. Вершина *a* является промежуточной в цепях *bad*, *bac* и *dac*

б) Пусть в графе n вершин. Предположим, что степень каждой вершины не превосходит k. Тогда сумма всех степеней не превосходит kn, а общее число ребер не больше чем $\frac{kn}{2}$.

Рассмотрим все 2-цепи (цепи длины 2) в этом графе. Каждая вершина является промежуточной не более чем в $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ таких цепях (на рисунке 2 нарисованы цепи для промежуточной вершины степени 3). Таким образом, всего в графе 2-цепей не больше чем $\frac{k(k-1)n}{2}$.

Любые две вершины связаны ребром или 2-цепью. Поэтому имеющиеся ребра и 2-цепи связывают не более чем $\frac{kn}{2}+\frac{k(k-1)n}{2}=\frac{k^2n}{2}$ пар вершин. Общее же число пар вершин равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Должно выполняться неравенство

$$\frac{n(n-1)}{2} \le \frac{k^2n}{2},$$

откуда $n \le k^2+1$. При $k=12$ граф не может содержать больше чем $12^2+1=145$ вершин. Противоречие. Значит, степень хотя бы одной вершины больше чем 12.

13. Пять волшебных фонарей (от 9 класса, 2 балла). В волшебной пещере 5 волшебных фонарей. Чтобы фонарь загорелся, его нужно коснуться волшебной палочкой или хотя бы пальцем. Главное волшебство состоит в том, что фонари зажигают только в определенном, но никому не известном порядке: первый можно зажечь просто касанием, второй тоже можно зажечь касанием, но только если первый уже горит и так далее. Найдите математическое ожидание случайной величины «*число касаний, которые потребуются, чтобы зажечь все фонари*».

Автор А.Акимов

Ответ: 10.

Решение. Чтобы зажечь первый фонарь, нужно в среднем $\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$ касания. Когда первый фонарь горит, мы попадаем в такую же ситуацию, но фонарей на один меньше. Значит, чтобы найти и зажечь второй фонарь, нужно в среднем $\frac{1+2+3+4}{4}=2{,}5$ касания. И так далее. Все фонари потребуют в среднем $3+2{,}5+2+1{,}5+1=10$ касаний.

14. Большой средний угол (от 9 класса, 4 балла). На окружности равномерно и независимо выбраны три точки. Какова вероятность того, что средний по величине угол образованного ими треугольника больше чем $60°$?

Автор Б. Френкин

Ответ. $\frac{1}{3}$.

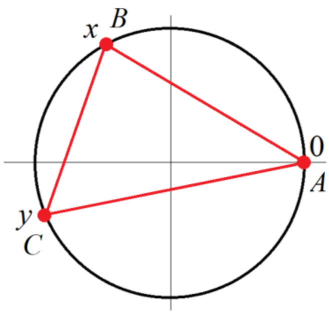

Рис. 3

Решение. Пусть треугольник ABC со случайными вершинами уже вписан в окружность (рис. 3). Будем считать, что эта окружность числовая, что она имеет длину 1 и что точки A, B и C имеют координаты $0, x$ и y соответственно.

Мы также вольны считать, что углы по величине распределились следующим образом: $\angle B < \angle C < \angle A$. Тогда случайные числа x и y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x < y < 1, \\ 1 - y < x < y - x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y > 2x, \\ y > 1 - x, \\ y < 1. \end{cases}$$

На координатной плоскости эта система определяет треугольник KLM, из которого выбирается случайная точка (рис. 4). Событие «$\angle C > 60°$» состоит в том, что противолежащая углу C дуга AB длиннее, чем треть всей окружности, то есть выбранная точка попадёт в треугольник QLM, расположенный внутри треугольника KLM правее прямой $x = \frac{1}{3}$. Вероятность события QLM найдем как отношение площадей треугольников.

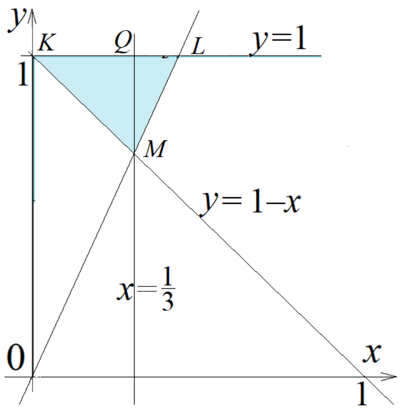

Рис. 4

Абсциссы точек Q и L равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно. Поэтому точка Q разбивает отрезок KL в отношении $2:1$.

$$\mathrm{P}(QLM) = \frac{S_{QLM}}{S_{KLM}} = \frac{1}{3}.$$

15. Шляпный бутик (от 9 класса, 5 баллов). В бутик, где продаются 10 модных шляпок, зашли 10 модниц. Каждая хочет купить себе шляпку. Каждая шляпка обладает некоторой привлекательностью, а каждая модница обладает определенной привередливостью. Привлекательности и привередливости – случайные и независимые числа из отрезка $[0;1]$. Модница готова купить шляпку, если привлекательность этой шляпки не меньше, чем привередливость модницы. В противном случае модница шляпку не купит ни за что.

Какова вероятность того, что, возможно, договорившись между собой, все модницы сумеют купить по шляпке?

Ответ: $\frac{1}{11}$.

Решение. Вероятность того, что какие-то два значения параметров «привлекательность» и «привередливость» случайно совпали, равна нулю. Будем считать, что все значения попарно различны. Тогда можно упорядочить модниц и шляпки по возрастанию их параметров на одной координатной прямой.

Событие A «*все модницы сумеют купить по шляпке*» осуществится, только если правее каждой модницы на числовой прямой отмечено больше шляпок, чем модниц.

Можно вообразить случайное блуждание с начальным состоянием $s = 0$. «Пойдем» по отрезку $[0;1]$ справа налево – от единицы к нулю. Если попадается шляпка, то скажем, что случился очередной *шаг блуждания,* и увеличим s на единицу. Как только встретится модница – тоже шаг блуждания, но s уменьшается на единицу.

Всего s изменится ровно 20 раз – увеличится или уменьшится на единицу в каждом узле блуждания, причем в конце вернется в состояние $s=0$, поскольку шляпок и модниц (шагов вверх и вниз) поровну. Событие A равносильно событию «$s \geq 0$ *во всех точках отрезка*». Такое случайное блуждание из 20 шагов удобно изобразить на плоскости ломаной траекторией, которая проходит не ниже нуля (рис. 5). Поскольку траектория, начавшись в состоянии $s=0$, возвращается в него на последнем шагу, такая траектория *возвратна*.

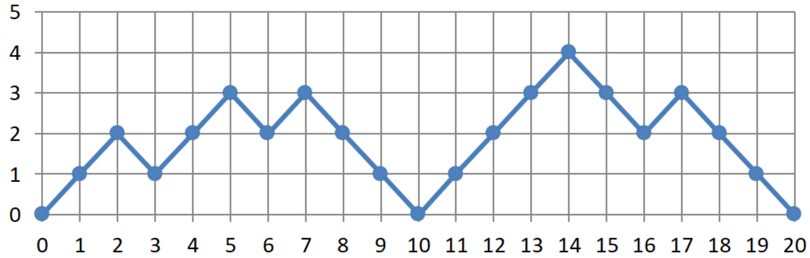

Рис. 5. Возвратная траектория случайного блуждания, не опускающаяся ниже нуля. На горизонтальной оси – номер шага блуждания, на вертикальной – значение s

Если траектория хоть раз опустится ниже нуля, то событие A станет невозможным – какому-то множеству модниц достаточно привлекательных шляпок на всех не хватит.

Общее количество возвратных траекторий равно количеству способов выбрать из 20 шагов ровно 10 подъемов, то есть C_{20}^{10}.

Количество возвратных траекторий длины 20, не опускающихся ниже нуля, равно *числу Каталана* $C_n = \dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$ при $n=10$, то есть $C_{10} = \dfrac{C_{20}^{10}}{11}$.

В силу случайности распределения привлекательностей и привередливостей, вероятность события A равна

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{C_{20}^{10}}{11C_{20}^{10}} = \frac{1}{11}.$$

16. Летающий огурец (от 10 класса, 4 балла). Общество уфологов взбудоражено многочисленными сообщениями об НЛО, который выглядит, как длинный тонкий огурец, и при этом беспрестанно и беспорядочно вращается относительно продольной, поперечной и вертикальной осей. Сфотографировать объект по неизвестным причинам не удалось, однако в распоряжении уфологов оказались три отчетливых фотографии тени, которую это НЛО отбрасывало на горизонтальные поверхности. Фотографии сделаны в случайные моменты времени случайными фотографами. Уфологи совершенно точно измерили длину тени, запечатленной на каждой фотографии. Длины получились 15,8 м, 3,3 м и 12,5 м. На основании этих данных нужно сделать оценку истинной длины летающего огурца. Сделайте ее.

Ответ: оценка методом моментов 16,7 м.
Примечание. Другие методы могут дать другие оценки.

Решение. Если длина огурца равна a, то длина его тени – случайная величина X. Найдем ее математическое ожидание. Пусть φ – угол между отрезком случайной прямой (продольной осью НЛО) в пространстве и горизонтальной плоскостью проекции. Будем считать, что $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$. Тогда длина проекции X становится случайной функцией угла: $X(\varphi) = a\cos\varphi$, и не составляет труда найти ее математическое ожидание:

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\varphi) f(\varphi) d\varphi,$$

где $f(\varphi)$ – функция плотности вероятности. Угол случайный, то есть он имеет равномерное распределение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а потому на этом отрезке плотность вероятности $f(\varphi)$ равна $\frac{2}{\pi}$, а вне его она равна нулю. Тогда

$$\mathrm{E}X = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi d\varphi = \frac{2a}{\pi}\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{2a}{\pi}.$$

Воспользуемся методом моментов, то есть оценим математическое ожидание $\mathrm{E}X$ с помощью среднего значения наблюдений:

$$\mathrm{E}X = \frac{15,8+3,3+12,7}{23} = \frac{31,8}{3} = 10,6 \text{ (м)}.$$

Чтобы найти оценку $\hat{a}$ величины a, решим уравнение $\frac{2\hat{a}}{\pi} = 10,6$. Получаем:

$$\hat{a} = \frac{10,6\pi}{2} \approx 16,7 \text{ (м)}.$$