И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Продолжение.
Начало см. № 4, 5, 7, 10 за 2023 г.

ТЕМА: «ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ»

СЦЕНАРИИ УРОКОВ

Урок: «Среднее арифметическое группированных данных»

Оборудование: калькуляторы или персональные компьютеры.

Цель урока: сформировать умение находить среднее арифметическое данных, сгруппированных по величине; создать представление о частоте события и связи частоты и среднего арифметического. Соответствующие навыки и понятия используются впоследствии при изучении теории вероятностей. При возможности познакомьте учащихся со средствами электронных таблиц, предназначенными для поиска средних. Это облегчит выполнение последующих практических и лабораторных работ.

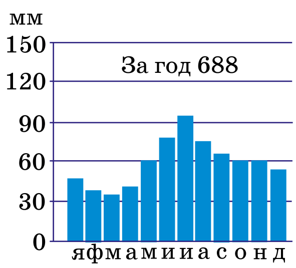
Вопросы для повторения

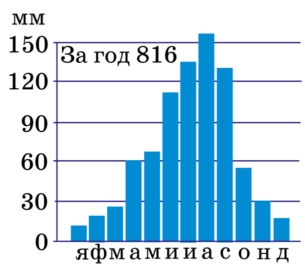
1. В таблице даны площади земельных угодий в Российской Федерации по категориям. Какого типа диаграмму лучше использовать для представления этих данных?

Категории	Леса	Особо охраняемые территории	Промышленные предприятия и земли специального назначения	Населенные пункты	Земли сельскохозяйственного назначения	Водный фонд	Земли запаса
Площадь (млн га)	1122,3	46,8	16,9	20,0	386,5	28,0	89,3

Ответ: круговая, поскольку в таблице дается распределение долей целого (площади земель Российской Федерации).

2. На диаграммах показано распределение осадков по месяцам в двух городах России: в Москве и во Владивостоке. Попробуйте, опираясь на свои знания географии и личный опыт, определить, какая диаграмма какому городу соответствует.





Ответ: в Москве умеренно-континентальный климат. Моря далеко. Осадки летом (дождь) и зимой (снег) не очень сильно различаются по количеству. Во Владивостоке муссонный климат — дождей летом должно быть намного больше, чем осадков зимой, а всего осадков больше, чем в Москве. Скорее всего, левая диаграмма относится к Москве, а правая — к Владивостоку.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Часто, когда данных много, их приходится группировать — указывать в таблице значения и их количества: сколько каких чисел встречается. Рассмотрим самый простой случай.

Пример 1. За контрольную работу по статистике школьникам выставлены отметки. Нужно найти среднюю отметку.

Фамилия		Фамилия		Фамилия		Фамилия	
Абдуллаева	3	Грачева	3	Луданова	3	Обжулян	4
Андриенко	4	Заикина	4	Любчикова М.	2	Ожерельев	4
Антипов	4	Зайцева	4	Любчикова Л.	3	Прошунин	3
Афанасьева	4	Инамов	5	Макаркина	4	Сахаров	4
Балабанова	5	Карпова	5	Малофеев	4	Соколов	4
Болелова	3	Клопов	3	Мельникова	4	Степанов	4
Боровкова	4	Копылова	4	Мохаммад	5	Хромоченков	3
Бочарова	3	Крестиничева	3	Новикова А.	3	Фетисов	4
Воробьева	3	Кудряшов	2	Новикова Ю.	3	Яковкина	4

Здесь 36 человек и, стало быть, 36 отметок. Хорошо то, что все отметки — целые числа от 2 до 5. Это позволяет представить данные гораздо компактнее, ведь нам неважно, кто именно какую отметку получил. Составим таблицу, где просто укажем, сколько каких отметок.

Отметка	2	3	4	5
Количество	2	13	17	4

Для заполнения такой таблицы удобно использовать технику ручного подсчета, например, с помощью «заборчиков».

Теперь запишем среднее, сгруппировав в скобках двойки, тройки, четверки и пятерки. В знаменателе запишем сумму чисел из графы *Количество*. Это даст общее количество значений:

$$\frac{(2+2)+\left(\overbrace{3+3+\ldots+3}^{13\text{ троек}}\right)+\left(\overbrace{4+4+\ldots+4}^{17\text{ четверок}}\right)+(5+5+5+5)}{2+13+17+4}.$$

Можно записать проще:

$$\frac{2\cdot\mathbf{2}+3\cdot\mathbf{13}+4\cdot\mathbf{17}+5\cdot\mathbf{4}}{\mathbf{2}+\mathbf{13}+\mathbf{17}+\mathbf{4}}=\frac{4+39+68+20}{36}=\frac{131}{36}\approx 3{,}64.$$

Обратим внимание на то, как получается итоговая формула: в числителе — сумма произведений значений на их количество, а в знаменателе — сумма количеств (то есть общее количество всех отметок). Такой способ поиска среднего арифметического удобен, когда в наборе много повторяющихся данных.

Пример 2. Международная картографическая компания 2ГИС проводила подсчет средней этажности домов в одном из кварталов Москвы. Данные занесены в таблицу. Найдите среднее число этажей в этом квартале. Подумайте, несет ли какую-нибудь полезную информацию такой подсчет.

Число этажей	2	3	5	9	12	14	17
Количество зданий	2	5	24	7	3	3	1

Решение. Среднее равно

$$\frac{2\cdot 2+3\cdot 5+5\cdot 24+9\cdot 7+12\cdot 3+14\cdot 3+17\cdot 1}{2+5+24+7+3+3+1}=$$

$$=\frac{4+15+120+63+36+42+17}{45}=\frac{297}{45}=6{,}6.$$

Желательный результат обсуждения. Пятиэтажные дома обычно имеют от 3 до 10 подъездов по 15 или 20 квартир в каждом. Многоэтажные дома часто имеют один подъезд. Само по себе число «среднее число этажей» ничего не говорит ни о плотности застройки (количество зданий на кв. км), ни о плотности населения (количество жителей на кв. км) в квартале. Трудно представить себе, зачем нужна и что в действительности отражает такая информация.

В рассмотренных примерах количество различных значений было небольшим. В примере 1 всего четыре значения: 2, 3, 4 и 5. В примере 2 — семь значений. Бывает так, что значений очень много. Тогда их приходится группировать в интервалы. Близкие значения, как правило, попадают в один и тот же интервал.

Рост (см)	142,5	147,5	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5
h = Рост – 142,5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\frac{h}{5}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество	5	14	52	106	178	236	205	123	60	19	2

Пример 3. Некоторое агентство изучало рост взрослых женщин в России. Измерили рост женщин в случайной выборке 1000 человек. Для целей исследования данные сгруппировали в интервалы по 5 см и занесли в таблицу. Вычислите среднее арифметическое значение роста женщин, попавших в выборку.

Рост (см)	Количество
140–145	5
145–150	14
150–155	52
155–160	106
160–165	178
165–170	236
170–175	205
175–180	123
180–185	60
185–190	19
190–195	2

Решение. Прежде чем заняться вычислениями, предложите ученикам попробовать сказать без подсчетов, каким примерно должно быть среднее арифметическое.

Если бы в таблице были конкретные значения, то средний рост вычислялся бы так же, как в примере про отметки. Но в ней интервалы, а находить «среднее арифметическое интервалов» мы не умеем. Поэтому на каждом интервале нужно выбрать какое-нибудь число[1]. Проще всего (обычно так и делают) взять середину каждого интервала.

Рост (см)	Середина интервала	Количество
140–145	142,5	5
145–150	147,5	14
150–155	152,5	52
155–160	157,5	106
160–165	162,5	178
165–170	167,5	236
170–175	172,5	205
175–180	177,5	123
180–185	182,5	60
185–190	187,5	19
190–195	192,5	2

Если есть компьютер, то неважно, с какими числами работать. Если же вычисления делаются вручную или с помощью калькулятора, удобнее работать с небольшими числами, желательно, с целыми. Можно воспользоваться свойствами среднего арифметического, изученными на предыдущем уроке: среднее значение «двигается» и «сжимается» вместе со всем набором данных.

Рассмотрим один из способов упрощения вычислений. Вычтем из каждого числа 142,5 — наименьшее из средних по интервалам, а результаты (обозначим h) разделим на 5. Это удобно, так как каждое из полученных чисел кратно пяти. Результаты этих действий отражены в таблице вверху страницы. Рассчитав среднее по полученным данным, легко будет найти среднее исходных.

Среднее равно

$$\frac{0\cdot5+1\cdot14+2\cdot52+3\cdot106+4\cdot178+5\cdot236+6\cdot205}{1000}+$$
$$+\frac{7\cdot123+8\cdot60+9\cdot19+10\cdot2}{1000}=5{,}09.$$

Теперь с полученным числом нужно сделать обратные действия: сначала умножить на 5, а затем прибавить 142,5:

$$5{,}09\cdot5+142{,}5=167{,}95.$$

Мы получили приближенное среднее арифметическое. Почему приближенное? Потому что мы знали не точный рост каждой из участниц выборки, а только приближенное значение, а именно интервал, в который попал ее рост. Но потеря точности невелика.

Вернемся к примеру 2 про дома и этажи. Значение 9 (девятиэтажный дом) встречается 7 раз из 45. Скажем, что число $\frac{7}{45}\approx0{,}156$ — это *частота* значения 9.

Пример 4. Найдите частоты значений 5 и 12 из примера 2.

Среднее арифметическое группированных данных можно вычислять с помощью частот. Сначала занесем частоты в таблицу, округлив их до сотых.

Число этажей	2	3	5	9	12	14	17
Количество зданий	2	5	24	7	3	3	1
Частота	0,044	0,111	0,533	0,156	0,067	0,067	0,022

Составим сумму произведений значений и частот:

$$22\cdot0{,}44+3\cdot0{,}111+5\cdot0{,}533+9\cdot0{,}156+$$
$$+12\cdot0{,}067+14\cdot0{,}067+17\cdot0{,}022=7{,}398$$

Ответ: $\frac{24}{45}$ и $\frac{3}{45}$, то есть приближенно 0,533 и 0,067.

[1] При этом, конечно, расчет получается менее точным, чем если бы мы усредняли 1000 исходных значений. Но погрешность мала, а выигрыш в скорости расчета велик.

Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

– Почему такая формула вычисления среднего верна?

– Чему равна сумма частот всех этажей?

Желательный результат обсуждения. Прежняя формула и формула с частотами — одно и то же. Если в последней формуле вынести за скобки общий множитель $\frac{1}{45}$, получится обычная формула для среднего арифметического. Сумма частот равна единице.

Таким образом, можно дать два определения среднего арифметического числового набора.

1. Сумма значений, деленная на их количество.

2. Сумма произведений значений на их частоты.

Примечание. Если есть возможность выполнять задания на компьютере в электронной таблице, разумно использовать следующие функции[2]:

= СУММ(массив) — вычисляет сумму чисел массива;

= СУММПРОИЗВ(массив1, массив2) — вычисляет сумму произведений соответствующих чисел массива.

Пример выполнения задания из примера 3 показан на рисунке внизу страницы. Обратите внимание на вычисление среднего с использованием функций СУММПРОИЗВ и СУММ:

= СУММПРОИЗВ(значения; количества)/СУММ(количества).

Выводы. Среднее арифметическое можно успешно находить, не только когда у нас есть «сырые» данные эксперимента. Иногда значения сгруппированы в интервалы, и если группировка удачная, то найти среднее арифметическое можно проще, чем имея дело с исходным массивом данных.

Важно! При группировке большую роль играет выбор интервалов. Если интервалы группировки очень узкие, то их много. Поэтому ошибка вычислений маленькая, но вычислений много. Если интервалы очень широкие, то вычислений мало, зато сильно падает точность усреднений. При представлении и описании данных стараются подобрать интервалы таким образом, чтобы их было не очень много (удобно видеть), но при этом ошибки в вычислениях не были бы слишком большими (результаты можно использовать).

Рекомендуемое домашнее задание

1. В течение года в школе прошли олимпиады по 12 учебным предметам. В таблице показано, сколько учащихся 7-х классов приняли участие в одной, в двух олимпиадах и т.д. Например, 15 школьников не участвовали ни в одной из олимпиад. С помощью калькулятора или компьютера найдите среднее число олимпиад, в которых участвовал семиклассник этой школы.

Количество предметов	Количество учащихся
0	15
1	53
2	103
3	76
4	81
5	53
6	34
7	12
8	4
9	2
10	0
11	0
12	1

2. В таблице дано распределение баллов ЕГЭ по математике в трех школах. Данные сгруппированы в интервалы по 10 баллов. В трех правых графах показано, сколько выпускников школы получили балл, попадающий в соответствующий интервал.

[2] Более подробно действие функций и примеры их применения будут изучены в ходе выполнения лабораторной работы по темам описательной статистики.

C7   fx =СУММПРОИЗВ(C4:M4;C5:M5)/СУММ(C5:M5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	1	Рост, см	142,5	147,5	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5
3	2	Рост -142,5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	3	(Рост -142,5)/5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5		Количество	**5**	**14**	**52**	**106**	**178**	**236**	**205**	**123**	**60**	**19**	**2**
6													
7		Среднее в строке 3	5,09										
8		Средний рост	**168**										

а) Найдите приближенно средний балл в школе 3.

б) Можно ли утверждать, что истинный средний балл выпускников школы 1 выше, чем истинный средний балл выпускников школы 2?

в) Можно ли утверждать, что истинный средний балл в школе 1 выше, чем в школе 3?

Обоснуйте свои ответы на вопросы «б» и «в».

Баллы ЕГЭ	Количество выпускников		
	школа 1	школа 2	школа 3
1–10	2	3	7
11–20	5	7	9
21–30	11	10	14
31–40	10	15	17
41–50	23	19	21
51–60	19	22	11
61–70	27	18	9
71–80	8	5	4
81–90	0	3	2
91–100	2	1	0
Средний балл по школе	49,9	47,1	

Урок: «Среднее геометрическое»

Оборудование: калькулятор.

Цель урока: знакомство учащихся с понятием среднего геометрического набора данных. Учащиеся должны научиться находить приближенно среднее геометрическое числовых наборов с помощью калькулятора. У учащихся должно сложиться представление о том, когда естественным средним является среднее геометрическое, и о том, когда оно не подходит в качестве описательного параметра.

Разбор задания 2 из домашней работы

Решение. а) Средний балл школы 3 равен приближенно 39,6.

б) Разность между вычисленными приближенными средними школ 1 и 2 меньше 10 баллов, то есть меньше длины интервала группировки. Утверждать, что истинный средний балл выпускников школы 1 выше, чем истинный средний балл выпускников школы 2, нельзя. Может получиться так: в школе 1 среднее около 45, а в школе 2 — около 46.

в) Разница между приближенными средними школ 1 и 3 больше, чем длина интервала группировки 10. Истинные средние отличаются от своих оценок не больше, чем на 5. Даже если в школе 1 ошибка –5, а в школе 3 ошибка +5, все равно у школы 3 истинное среднее меньше, чем у школы 1. Поэтому можно утверждать, что истинный средний балл в школе 1 выше, чем в школе 3.

Задания на повторение (*устно*)

1. Среднее арифметическое набора чисел равно 205. Чему будет равно среднее набора, если все числа набора:

а) увеличить в 10 раз;

б) уменьшить на 5;

в) сначала увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 10?

Ответ: а) 2050; б) 200; в) 400.

2. В наборе 10 чисел, их среднее арифметическое равно 8. Чему будет равно среднее арифметическое, если:

а) первое число в наборе увеличить на 1;

б) третье число уменьшить на 2;

в) пятое и восьмое числа увеличить на 3?

Ответ: а) 8,1; б) 7,8; в) 8,6.

Убедимся в том, что среднее арифметическое в некоторых случаях неуместно и приводит к парадоксальным результатам.

Пример 1. После вырубки части лесного массива в связи со строительством жилого квартала площадь озеленения в районе сократилась на 30%. Через год застройщик озеленил примыкающий к лесному массиву пустырь, в результате площадь озеленения выросла на 40% Застройщик сообщил, что средний ежегодный прирост площади лесопарковой зоны составил 5%, а экологи утверждают, что в результате действий застройщика площадь зеленого массива сократилась на 2%. Могут ли оба утверждения быть верными? Какое утверждение верно?

Желательный результат обсуждения. Судя по заявлению, застройщик считал так: средний процент равен

$$\frac{-30\%+40\%}{2}=5\%.$$

Но можно ли так работать с процентами?

Пусть до вырубки площадь зеленых насаждений района была равна S. После вырубки равна $0{,}7S$. Если увеличить эту величину на 40%, то итоговая площадь будет равна

$$0{,}7S\cdot 1{,}45=0{,}98S.$$

То есть, площадь зеленых насаждений не вырастет на 5%, а сократится на 2%.

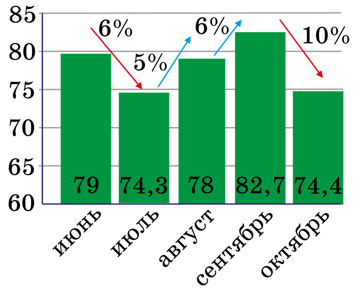
Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

Попросите учащихся рассчитать, на сколько процентов теперь дополнительно нужно увеличить площадь озеленения, чтобы вернуться к исходному значению (2,1% достаточно).

Какое среднее нужно в таких случаях и как его искать?

Пример 2. На диаграмме показаны цены на нефть марки Brent в период с июня по октябрь

2018 года. На диаграмме указано, на сколько процентов приближенно менялась цена каждый месяц. Определите среднее месячное изменение цены на нефть в процентах за представленный период.



Решение. Находить среднее арифметическое процентов не следует, мы в этом уже убедились на предыдущем примере. Узнаем, на сколько процентов изменилась цена за весь период:

$$\frac{74{,}4}{79}\cdot 100\% \approx 94{,}2\%.$$

Этот результат можно получить, последовательно умножая начальную цену на соответствующие множители:

$$0{,}94 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}942.$$

Цена менялась 4 раза и в итоге упала примерно на 5,8%. Может быть, $\frac{5{,}8\%}{5} = 1{,}16\%$ — подходящее среднее? Проверим. Если бы цена ежемесячно уменьшалась на 1,16%, то в октябре нефть стоила бы

$$79 \cdot 0{,}9884 \cdot 0{,}9884 \cdot 0{,}9884 \cdot 0{,}9884 =$$
$$= 79 \cdot 0{,}9884^4 \approx 75{,}4 \text{ доллара}.$$

А она стоила 74,4 доллара. Ошибка.

Разумно назвать средним изменением такое число a, чтобы выполнялось равенство

$$79 \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}9 \approx 79 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a,$$

то есть

$$a^4 \approx 0{,}94 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}9.$$

Это число a — *среднее геометрическое* чисел 0,94, 1,05, 1,06 и 0,9.

Попробуем подобрать значение a при помощи калькулятора.

Итак, произведение множителей равно

$$0{,}94 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}942.$$

Нужно подобрать a так, чтобы a^4 равнялось числу 0,942. Точную десятичную дробь мы найти не сможем, но приближенно это сделать можно.

Если $a = 0{,}98$, то $a^4 = 0{,}98^4 \approx 0{,}9224$. Мало.

Если $a = 0{,}99$, то $a^4 = 0{,}99^4 \approx 0{,}9606$. Много.

Пусть $a = 0{,}985$. Тогда $a^4 = 0{,}985^4 \approx 0{,}9413$. Мало, но уже близко.

Возможно, потребуются еще две-три попытки, чтобы найти хорошее приближение $a = 0{,}9852$.

Значит, среднемесячное изменение цены равно

$$(0{,}9852 - 1) \cdot 100\% = -1{,}48\%.$$

Определение. Средним геометрическим n положительных чисел называют такое положительное число a, что число a^n равно произведению данных чисел.

Пример 3. Найдем с помощью калькулятора среднее геометрическое чисел 2, 3, 3, 4, 1, 5.

Всего чисел шесть. Их произведение равно $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 = 360$. Среднее арифметическое равно 3; с этого числа можно начать подбор.

$3^6 = 729$. Это много.

$2^6 = 64$. Мало.

$2{,}5^6 \approx 244{,}1$. Мало.

$2{,}7^6 \approx 387{,}4$. Много, но уже близко.

$2{,}6^6 \approx 308{,}9$. Мало.

$2{,}65^6 \approx 346{,}3$. Нужно еще немного увеличить.

$2{,}67^6 \approx 362{,}3$. Очень близко. Можно взять чуть меньше.

$2{,}668^6 \approx 360{,}7$. Достигнута хорошая точность. Вероятно, нужно остановиться, хотя можно продолжать еще долго и даже бесконечно долго. Итак, среднее геометрическое чисел 2, 3, 3, 4, 1, 5 равно приближенно 2,668.

Пример 4. В таблице приведены данные об изменении средней цены на золото в течение 7 лет по отношению к прошлогодней цене.

Год	2011	2012	2013	2014
Прирост/падение (%)	+11,5	+5,7	–26,8	–2,1

Год	2015	2016	2017
Прирост/падение (%)	–10,5	+8,4	+13,2

Определите, на сколько процентов в год в среднем менялась цена золота за указанный период. Выросла или снизилась цена на золото за 7 лет?

Решение. Добавим в таблицу строку «множитель», в которую внесем значения коэффициентов изменения цены.

Год	2011	2012	2013	2014
Прирост\падение (%)	+11,5	+5,7	–26,8	–2,1
Множитель	1,115	1,057	0,732	0,979

Год	2015	2016	2017
Прирост\падение (%)	–10,5	+8,4	+13,2
Множитель	0,895	1,084	1,132

Найдем среднее геометрическое этих множителей:

$$a^7 = 1{,}115 \cdot 1{,}057 \cdot 0{,}732 \cdot 0{,}979 \cdot 0{,}895 \cdot 1{,}084 \times$$
$$\times 1{,}132 \approx 0{,}9276.$$

Каждый раз вычислять среднее геометрическое подбором утомительно. К счастью, почти в любом калькуляторе (годится любой экранный калькулятор в смартфоне или инженерный калькулятор) есть функция, которая позволяет это делать быстро.

Нужно найти такое a, что $a^7 = 0{,}976$. Введем число 0,976, а теперь нажмем последовательно кнопки (см. рис.). Среднее геометрическое найдено, $a \approx 0{,}9893$.

Следовательно, среднее изменение в процентах за год равно

$$(0{,}989 - 1) \cdot 100\% = -1{,}07\%.$$

Среднее изменение отрицательно, это значит, что цена золота снизилась.

Выводы. В случае, когда величина последовательно умножается на разные положительные множители, среднее изменение вычисляют с помощью среднего геометрического. Среднее геометрическое n данных положительных чисел — это такое число a, что a^n равно произведению данных чисел.

Рекомендуемое домашнее задание

1. С помощью калькулятора найдите среднее геометрическое чисел 4,5; 6,3; 3,8; 3,3; 7,4; 4,6.

2. Таблица содержит данные об изменении курса евро по отношению к рублю за 8 лет.

а) Найдите среднее годовое изменение курса евро.

б) Найдите средний курс евро в 2010 году.

в) Если бы каждый год прирост был средним (найденным в пункте «а»), сколько стоил бы евро в 2015 г.? Чем можно, по вашему мнению, объяснить разницу между полученным числом и истинным курсом 68,03 р.?

Год	2011	2012	2013	2014
Среднегодовой курс (руб.)	40,87	39,92	42,31	50,86
Динамика (%)	+1,5	–2,3	+6,0	+20,2

Год	2015	2016	2017	2018
Среднегодовой курс (руб.)	68,03	74,39	65,87	73,85
Динамика (%)	+33,8	9,3	–11,5	+12,1

Ответы: **1.** ≈4,79. **2.** а) Средний множитель 1,079; среднее процентное изменение 7,9%; б) 40,27 р. за евро; в) 58,80 р. за евро. Причина в неравномерности: в начале периода ежегодные изменения были небольшими, а затем — значительно больше.

Урок-практикум: «Среднее геометрическое»

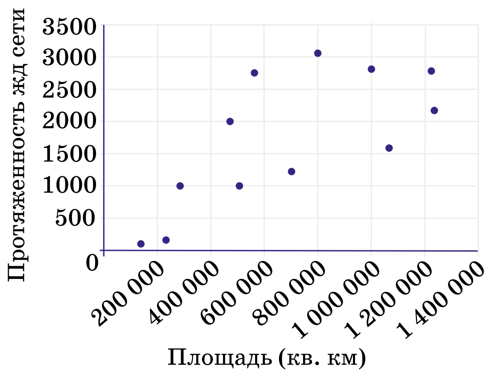
Оборудование: персональный компьютер или планшет с установленным процессором электронных таблиц и загруженным файлом Les20.xlsx.

Цель урока: учащиеся должны научиться использовать стандартную функцию MS Excel для вычисления среднего геометрического.

Повторение (*устная работа, 5 мин*)

1. По данным о площади территории и протяженности железнодорожной сети[3] некоторых стран мира построена диаграмма рассеивания. Как вы думаете, имеется ли связь между этими величинами? Как вы ее охарактеризуете?

Страна	Площадь	Протяженность железнодорожной сети
Перу	1 285 220	2020
Ангола	1 246 700	2761
Колумбия	1 138 910	1663
Боливия	1 098 580	2866
Мозамбик	801 590	3116
Замбия	752 614	1237
Кения	582 650	2778
Камерун	475 440	974
Марокко	446 550	1989
Эквадор	283 560	966
Гайана	214 970	187
Суринам	163 270	166



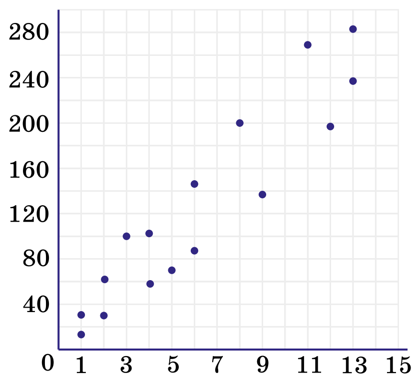
Ответ: возможна слабая положительная связь. С точки зрения здравого смысла связь действительно может присутствовать.

[3] По состоянию на 2018 год.

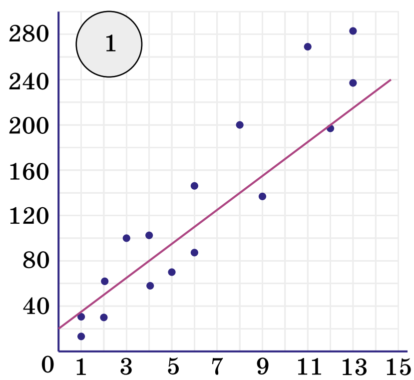
2. В таблице содержатся данные[4] о количестве линий и числе станций метрополитена некоторых городов мира.

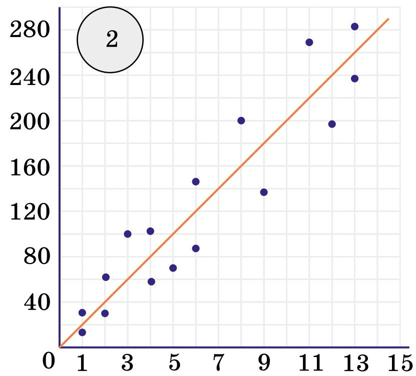
Город	Число линий	Число станций
Лондон	11	270
Токио	13	285
Киото	1	32
Гуанчжоу	13	235
Мехико	12	195
Сингапур	5	69
Дели	6	146
Вашингтон	6	91
Шеньчжэнь	8	199
Медельин	2	28
Ренн	1	15
Брюссель	4	59
Лилль	2	62
Милан	4	113
Стокгольм	3	100
Валенсия	9	138

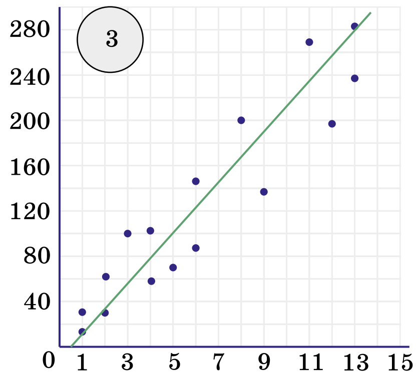
По этим данным построена диаграмма рассеивания.

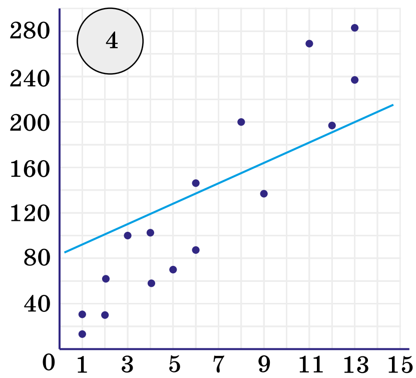


Ниже предложено четыре варианта оси этой диаграммы. Какая прямая, по вашему мнению, лучше всего описывает связь между данными? Для выбранной прямой найдите приближенно уравнение связи. Сколько в среднем станций соответствует одной ветке метро?









Ответ: прямая 2 лучше всего из предложенных отражает связь между величинами. Опишем связь между количеством линий и количеством станций метро. Прямая 2 проходит через точки (0; 2) и (1;22) — это прикидка «на глаз». Тогда уравнение прямой $y = 20x + 2$. Это значит, что (согласно нашей модели) на каждую линию метро приходится в среднем 20 станций.

Для среднего геометрического числового массива разработчики электронных таблиц предусмотрели функцию СРГЕОМ(массив данных).

Пример. В файле Les20.xlsx на листе «Пример расчета» даны 10 чисел. Для нахождения среднего геометрического данных чисел в ячейку E3 впишем имя функции =СРГЕОМ. Теперь нужно указать массив данных: =СРГЕОМ(B3:B12).

[4] По состоянию на 2018 год.

После нажатия клавиши *Enter* в ячейке E3 появится результат (рис. 1).

E3 =СРГЕОМ(B3:B12)

	A	B	C	D	E
1					
2		Набор чисел			
3		0,9		среднее геометрическое:	1,05841942
4		1,2			
5		1,7			
6		0,8			
7		1,1			
8		0,7			
9		1,2			
10		2			
11		0,5			
12		1,3			

Рис. 1

Задание 1. Откроем файл Les20.xlsx и ознакомимся с таблицей на листе «Цены на медь». Динамика цены на медь за представленный период отражена в виде коэффициентов изменения. Определите среднее месячное изменение цены на медь в процентах за представленный период.

Решение. Найдем среднее геометрическое коэффициентов. Для этого в ячейку F3 впишем соответствующую формулу для расчета среднего геометрического данного массива коэффициентов по аналогии с примером, разобранным ранее. В ячейке F3 появится результат 1,0021.

Для нахождения среднего месячного изменения цены на медь в процентах в ячейку F4 введем формулу расчета процента по множителю (рис. 2). В ячейке F4 появится результат 0,2098. Средний месячный процент равен приблизительно 0,21%.

F4 =(F3-1)*100

	A	B	C	D	E	F
1	Динамика цены на медь					
2	Год	Месяц	Динамика			
3	2017	февраль	1,0182		ср. геом.множитель:	1,0021
4	2017	март	0,9685		средний месячный процент:	0,2098
5	2017	апрель	0,9726			
6	2017	май	0,9872			
7	2017	июнь	1,052			
8	2017	июль	1,0743			
9	2017	август	1,0701			
10	2017	сентябрь	0,9548			
11	2017	октябрь	1,0504			
12	2017	ноябрь	0,9926			
13	2017	декабрь	1,0587			
14	2018	январь	0,9921			
15	2018	февраль	0,9792			
16	2018	март	0,9613			
17	2018	апрель	1,0147			
18	2018	май	1,0041			
19	2018	июнь	0,9759			
20	2018	июль	0,9349			
21	2018	август	0,9687			
22	2018	сентябрь	1,0268			
23	2018	октябрь	0,9929			
24	2018	ноябрь	1,0121			

Рис. 2

Задание 2. Откройте лист «Средняя зарплата РФ», на нем содержатся данные о средней зарплате россиян за 19 лет. Данные представлены в рублях. Найдите среднее годовое изменение зарплаты в процентах за данный период.

Решение. Ознакомимся с таблицей. Заполним столбец *Множитель*. Для этого в ячейку D4 нужно ввести формулу, которая рассчитает множитель, показывающий, во сколько раз изменилась зарплата в 2001 году по сравнению с предыдущим годом (рис. 3). Скопируйте эту формулу во все ячейки столбца *Множитель* (выделены зеленым).

A	B	C	D
едняя зарплата россиян			
	год	в рублях	множ
	2000	1500	
	2001	2210	1,473

Рис. 3

Когда столбец заполнен, введите соответствующие формулы (по аналогии с заданием 1) для расчета среднего геометрического множителей (ячейка H4) и среднее годовое изменение зарплаты в процентах (ячейка H5). Результат заполнения первой таблицы представлен на рисунке 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Средняя зарплата россиян							
2		год	в рублях	множитель				
3		2000	1500					
4		2001	2210	1,47333333			ср. геом.множитель:	1,195101
5		2002	3200	1,4479638			средний годовой процент:	19,5101
6		2003	4300	1,34375				
7		2004	5455	1,26860465				
8		2005	6750	1,23739688				
9		2006	8560	1,26814815				
10		2007	10600	1,23831776				
11		2008	13600	1,28301887				
12		2009	17315	1,27316176				
13		2010	18755	1,08316489				
14		2011	20880	1,11330312				
15		2012	23370	1,11925287				
16		2013	26820	1,14762516				
17		2014	29795	1,11092468				
18		2015	32587	1,093707				
19		2016	33876	1,03955565				
20		2017	36203	1,0686917				
21		2018	37100	1,02477695				

Рис. 4

В результате получаем, что зарплата россиян в рублях росла в среднем примерно на 19,51% в год.

Выводы. Среднее геометрическое используется как статистический описательный параметр в тех случаях, когда нужно найти средний множитель. Такие задачи возникают нередко, поэтому в электронных таблицах заложена специальная функция.

Рекомендуемое домашнее задание

В файле Les20.xlsx на листе «Курс доллара к рублю» представлены данные о среднем годовом курсе доллара к рублю за 16 лет. Определите средний процент изменения курса доллара за год в период: а) 2003–2008 гг.; б) 2009–2013 гг.; в) 2014–2018 гг. Охарактеризуйте двумя-тремя предложениями динамику курса доллара за 16 лет, используя полученные средние.