И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА»

Материал предоставлен издательством «Просвещение»

От редакции. В издательстве «Просвещение» выходит в свет новое учебное пособие по курсу «Вероятность и статистика» для учащихся 10–11-х классов, соответствующее обновленному варианту ФГОС СОО.

Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Математика. Вероятность и статистика. 10–11 классы. Базовый и углубленный уровни. Учебное пособие. — М.: Просвещение, 2025.

Мы хотим познакомить учителей с новым учебным пособием и дать возможность подготовиться к учебному году, поэтому публикуем отдельные пункты пособия, выбрав материал, который ранее не был представлен в программах общего образования. В соответствии с тематическим планированием данные темы изучаются в начале 11-го класса.

Оглавление см. на с. 59.

Случайная величина и распределение вероятностей

Случайная величина

Большинство величин в окружающем мире подвержено случайной изменчивости — на их значения влияют различные факторы, и поэтому даже те величины, которые принято считать постоянными, во многом случайны. Часто изменчивость подчиняется закономерностям, которые проявляются при большом числе измерений или наблюдений. Задача теории вероятностей — изучение таких закономерностей с помощью математических методов.

Изменчивые величины, возникающие при проведении случайного опыта, мы будем называть *случайными величинами*.

Если каждому элементарному событию опыта поставлено в соответствие некоторое число, то говорят, что задана *случайная величина*.

Таким образом, случайная величина — это числовая функция, определенная на множестве элементарных событий случайного опыта.

Приведем несколько примеров.

– Рост случайно выбранного человека.

– Лотерейный выигрыш — случайная величина. Если выигрыш не случился, то можно считать, что эта случайная величина равна 0.

– Время безотказной службы прибора — случайная величина. Свойства этой случайной величины важны, например, при установлении гарантийного срока на новую технику.

– Доля бракованной продукции при массовом производстве — случайная величина.

– Напряжение в бытовой электрической сети в случайный момент времени — случайная величина, значения которой колеблются около 220 В.

– В магазине продается рис в пачках. Масса пачки является случайной величиной, так как она несколько отличается от номинальной массы, указанной на упаковке.

– Результат измерения массы, длины, площади или объема — случайная величина, поскольку измерения всегда содержат случайную погрешность.

Постоянную величину тоже можно считать случайной величиной, которая принимает единственное значение.

Пример 1. Симметричную монету бросают 2 раза. Рассмотрим случайную величину X «число выпавших орлов». Опыт может закончиться одним из четырех элементарных событий: РР, РО, ОР, ОО. В зависимости от того, чем закончится этот эксперимент, случайная величина X примет значение 0, 1 или 2.

Иногда с разными элементарными исходами связано одно и то же значение случайной величины. В этом примере исходы ОР и РО дают одно и то же значение $X = 1$.

Множество чисел называется *дискретным*, если любые два числа из этого множества можно отделить друг от друга интервалом, в котором нет элементов этого множества.

Любое конечное множество чисел дискретно. Дискретными могут быть и бесконечные множества. Например, множество натуральных чисел дискретно. Множество рациональных чисел не является дискретным, поскольку между любыми двумя рациональными числами существуют другие рациональные числа. Числовой интервал также не является дискретным множеством.

Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее значений дискретно.

Значение дискретной случайной величины можно пронумеровать натуральными числами в порядке возрастания.

Пример 2. Рассмотрим на диаграмме Эйлера некоторый случайный опыт и связанную с ним случайную величину X. Около каждого элементарного события подпишем, чему равна величина X, если это элементарное событие наступило. В опыте на рисунке 120 случайная величина X принимает значения 1, 2, 3 и 4. Если взять все элементарные события, при которых $X = 1$, получается событие A. Можно считать, что событие A — это и есть равенство $X = 1$, то есть $A = (X = 1)$. Здесь первый знак равенства — равенство между событиями, а в скобках стоит числовое равенство.

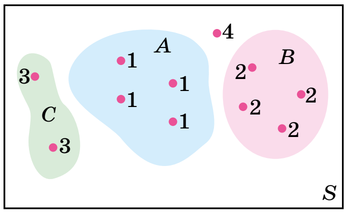


Рис. 120

Неравенство $X \le 2$ выполняется, если наступило одно из событий A и B, то есть событие $(X \le 2) = A \cup B$. Событие $B \cup C$ можно записать как $(2 \le X \le 3)$. Событию $(X = 4)$ благоприятствует единственное элементарное событие. При записи событий с помощью равенств или неравенств можно использовать скобки, а можно обойтись без них, если при этом не возникает двусмысленность.

Равенства, неравенства, системы и совокупности равенств и неравенств, связанные со случайными величинами, являются событиями, и мы можем говорить об их вероятностях.

Пример 3. Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X «сумма выпавших очков» принимает целые значения от 2 до 12. Вероятности этих значений неодинаковы. Запишем в клетки привычной нам таблицы эксперимента значение суммы выпавших очков (рис. 121).

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Рис. 121

Теперь видно, как вероятность распределена между всеми значениями X. Например, значению 2 благоприятствует одно элементарное событие, поэтому

$$\mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{36},$$

а значение 5 имеет вероятность

$$\mathrm{P}(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Распределение вероятностей случайной величины

Соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями называется *распределением вероятностей* случайной величины.

Иногда слово «вероятностей» опускают и говорят «распределение случайной величины» или просто «распределение», если ясно, о каких величинах идет речь.

Если случайная величина имеет бесконечное множество значений, то ее *распределение* также называется *бесконечным*.

Иногда конечное распределение удобно рассматривать как бесконечное — достаточно считать, что вероятности отсутствующих значений равны нулю.

Значения дискретной случайной величины и их вероятности часто удается представить таблицей. Пусть дискретная случайная величина X принимает конечное или бесконечное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

Получается *дискретное распределение* вероятностей:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Значок «~» мы используем вместо слов «случайная величина имеет распределение» или «случайная величина подчиняется распределению».

Сумма вероятностей всех значений случайной величины равна 1, поскольку совпадает с суммой вероятностей всех элементарных событий случайного опыта.

Дискретное распределение вероятностей иногда удается описать формулой или графически — с помощью диаграммы.

Пример 4. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины X «сумма выпавших очков» при двукратном бросании игрального кубика (см. пример 3):

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Это же распределение можно выразить формулой

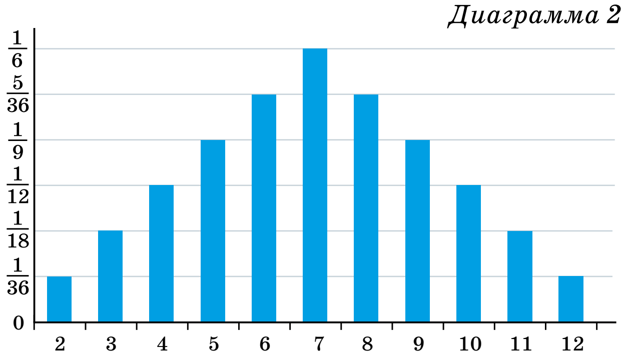
$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{6} - \frac{|k-7|}{36},$$

где $k = 2, 3, \ldots, 12$.

Проверьте, что эта формула верна.

Изобразим это же распределение на диаграмме 2. Значения отметим на горизонтальной оси, на вертикальной — их вероятности.

Диаграмма 2



Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическое ожидание — среднее значение случайной величины. Во многих случаях среднее арифметическое наблюдений некоторой величины близко к ее математическому ожиданию, и чем наблюдений больше, тем ближе. Это *закон больших чисел* — фундаментальный закон, благодаря которому во многих случайных явлениях в природе и обществе присутствует устойчивость.

Термин «математическое ожидание» был предложен Пьером Лапласом[1].

Пусть конечная или бесконечная дискретная случайная величина X имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Математическим ожиданием $\mathrm{E}X$ дискретной случайной величины X называется сумма[2]

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots$$

Число слагаемых может быть конечным или бесконечным в зависимости от того, конечна или бесконечна сама случайная величина.

Конечная случайная величина всегда имеет математическое ожидание.

Пример 1. Пусть случайная величина X имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

[1] Пьер Симон Лаплас (1749–1827) — математик, механик, один из создателей теории вероятностей.

[2] Буква E в обозначении математического ожидания является начальной буквой английского слова *expectation* — «ожидание».

Ее математическое ожидание

$$EX = -1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}3 = 0{,}8.$$

Математического ожидания бесконечной случайной величины может не существовать. Приведем примеры двух бесконечных случайных величин, первая из которых не имеет математического ожидания, а вторая имеет.

Пример 2. Случайная величина X подчиняется распределению

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & \ldots & 2^k & \ldots \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & \ldots & 0{,}5^k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Составим выражение для математического ожидания:

$$EX = 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}25 + 8\cdot 0{,}125 + \ldots$$
$$\ldots + 2^k\cdot 0{,}5^k + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Получилась бесконечная сумма единиц. Математического ожидания не существует.

Пример 3. Пусть величина X подчиняется геометрическому распределению $G(0{,}5)$:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ 0{,}5 & 0{,}25 & \ldots & 0{,}5^k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Можно считать, что X — количество бросков симметричной монеты, которые потребуются, чтобы выбросить орла. Математическое ожидание

$$EX = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}25 + 3\cdot 0{,}125 + 4\cdot 0{,}0625 + \ldots$$

Эта сумма существует, и можно алгебраически показать, что она равна 2. Но и без вычислений интуиция подсказывает: чтобы получить орла, нужно в среднем два броска, поэтому $EX = 2$. Математическое ожидание существует, несмотря на то, что случайная величина X бесконечна.

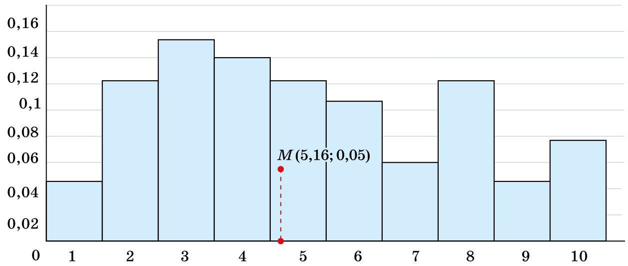
Вообще, если вероятность события равна p, то, для того чтобы это событие произошло в очередном испытании, в среднем нужно провести $\frac{1}{p}$ испытаний. Это согласуется со здравым смыслом, и пока примем это на веру. Позже мы докажем это утверждение, сформулировав его как теорему: если $X \sim G(p)$, то

$$EX = \frac{1}{p}.$$

Бесконечная случайная величина может иметь математическое ожидание, а может не иметь.

У математического ожидания есть ясный физический смысл. Изобразим распределение случайной величины X на диаграмме и вообразим, что эта диаграмма вырезана из фанеры или листа металла. Если эта диаграмма имеет центр масс в точке M, то проекция точки M на горизонтальную ось диаграммы совпадает с математическим ожиданием. На диаграмме 5 показано распределение некоторой случайной величины X. Центр масс M имеет координаты (5,16; 0,05) и проецируется в точку 5,16 на оси значений. Это и есть математическое ожидание: $EX = 5{,}16$.

Диаграмма 5



Центр масс проецируется в математическое ожидание

У многих случайных величин значения концентрируются около математического ожидания, а большие отклонения значений от математического ожидания маловероятны. В этом проявляется статистическая устойчивость. Поэтому изучение математических ожиданий имеет большое прикладное значение.

Математическое ожидание симметричной случайной величины

Встречаются случайные величины, у которых распределение симметрично относительно какого-либо числа: симметричны и значения, и их вероятности.

Пример 4. Распределение случайной величины X симметрично:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}12 & 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}12 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Распределение симметрично относительно значения 0, поэтому математическое ожидание равно 0.

Распределение может быть симметрично относительно любого числа.

Если распределение случайной величины X симметрично относительно числа a, то $EX = a$.

Это утверждение становится очевидным, если вспомнить про физический смысл математического ожидания: «центр масс» симметричного распределения находится на оси симметрии. Поэтому мы не будем доказывать это утверждение, но дадим его в качестве задачи в конце параграфа (см. задачу 335).

Пример 5. Пусть X — количество очков, выпавших при бросании игрального кубика. Значения от 1 до 6 расположены симметрично относительно числа 3,5, вероятности всех значений равны $\frac{1}{6}$. Распределение симметрично, поэтому $\mathrm{E}X = 3{,}5$.

Математическое ожидание бинарной случайной величины

Напомним, что бинарная случайная величина принимает лишь два значения — 0 и 1, отсюда и происходит название «бинарная». Распределение бинарной случайной величины I в общем случае имеет вид

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

где $q = 1 - p$. Напомним, что такое распределение называют бинарным или распределением Бернулли $B(p)$. Число p — параметр распределения.

Утверждение. Математическое ожидание бинарной случайной величины I с распределением Бернулли $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ равно p:

$$\mathrm{E}I = p.$$

Утверждение очевидно, но представляет интерес. Мы помним, что бинарная случайная величина может быть индикатором события. Рассмотрим какой-нибудь случайный опыт и в нем событие A. Тогда математическое ожидание индикатора I_A события A равно его вероятности:

$$\mathrm{E}I_A = \mathrm{P}(A).$$

Это равенство связывает вероятности событий со средними значениями случайных величин: вероятность любого события есть математическое ожидание его индикатора.

Пример 6. Стрелок стреляет по мишени. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле $p = 0{,}7$. Найдем математическое ожидание индикатора события A «стрелок промахнулся при трех первых выстрелах». Это событие имеет вероятность

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}3^3 = 0{,}027,$$

поэтому индикатор I_A имеет распределение

$$I_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}973 & 0{,}027 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\mathrm{E}I_A = 0{,}027.$$

Вычисление математического ожидания в электронной таблице

Если поместить таблицу распределения дискретной случайной величины на лист электронной таблицы, то вычислить математическое ожидание можно с помощью функции СУММПРОИЗВ, которая находит сумму произведений соответствующих элементов указанных массивов. На рисунке 126 показан пример.

Математическое ожидание характеризует не саму случайную величину, а распределение, которому эта величина подчиняется. Поэтому можно говорить не только о математическом ожидании одной случайной величины, но и о математическом ожидании распределения, имея в виду все случайные величины, имеющие это распределение.

Вопросы

1. Множество значений случайной величины симметрично относительно 0. Следует ли отсюда, что ее математическое ожидание равно 0?
2. Объясните своими словами, что такое симметричное распределение, и приведите пример.
3. Математическое ожидание случайной величины X равно 0. Следует ли отсюда, что
$$\mathrm{P}(X = 0) > 0?$$
4. Математическое ожидание индикатора события A больше, чем математическое ожидание индикатора события B. Следует ли отсюда, что событие A вероятнее события B?

E5 fx =СУММПРОИЗВ(C2:H2;C3:H3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Значения	1	2	3	4	5	6		
3		Вероятности	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1		
4										
5		Математическое ожидание =			3,4					

Рис. 126. Вычисление математического ожидания в электронной таблице

Задачи

329. Найдите математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}05 \end{pmatrix}$.

330. Две неизвестных вероятности в распределении случайной величины Z обозначены x и y. Найдите эти значения, если $\mathrm{E}Z = 2$.

а) $Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ x & y \end{pmatrix}$;

б) $Z \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 \\ x & y & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

331. Математическое ожидание индикатора случайного события A равно 0,35. Какова вероятность того, что случайное событие A не произойдет?

332. Найдите математическое ожидание случайной величины X^2, если:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$;

б) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

333. В магазине минеральная вода продается либо поштучно, либо упаковками по 2 или 16 бутылок. Предпочтения покупателей этой воды известны: вероятность покупки одной бутылки равна 0,74, упаковки из двух бутылок — 0,24, упаковки из 16 бутылок — 0,02. Сколько в среднем бутылок покупает один покупатель?

334. Случайная величина X имеет математическое ожидание a. Докажите, что математическое ожидание случайной величины $Y = X$ равно a.

335. Докажите, что если распределение случайной величины X симметрично относительно числа a, то $\mathrm{E}X = a$.

336. Найдите математическое ожидание случайной величины по диаграмме ее распределения (см. диаграммы 6–8 внизу страницы).

337. Найдите $\mathrm{E}X$ без вычислений, если:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$;

б) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 10 & 11 \\ 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}05 \end{pmatrix}$.

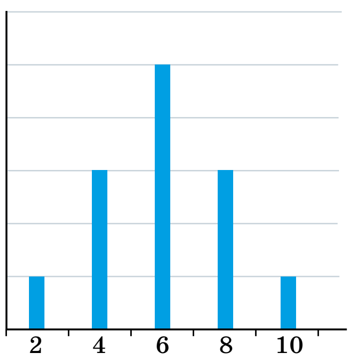
338. По данным страховой компании вероятность того, что с клиентом произойдет страховой случай, равна 0,01. При наступлении страхового случая выплачивается страховая выплата 100 000 р. Какой должна быть минимальная стоимость страховки, чтобы страховая компания в среднем получала с каждого клиента доход не меньше 1000 р.?

339. Известно распределение случайной величины X:

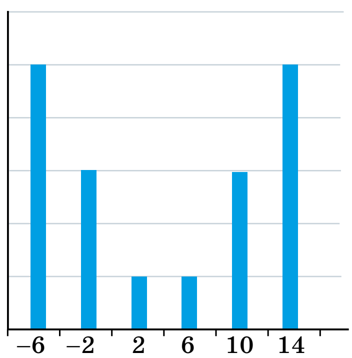
а) $X \sim \begin{pmatrix} 3 & 9 & 27 & \dots & 3^k & \dots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \dots & \frac{2}{3^k} & \dots \end{pmatrix}$;

б) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 3 & \dots & \sqrt{3^k} & \dots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \dots & \frac{2}{3^k} & \dots \end{pmatrix}$.

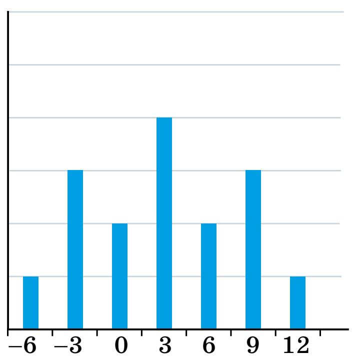
Существует ли $\mathrm{E}X$? Если да, то чему оно равно? Если нет, то почему?



а) Диаграмма 6



б) Диаграмма 7



в) Диаграмма 8

Оглавление