И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Материал предоставлен издательством «Просвещение». Начало см. в № 5 за 2025. г.»

УЧЕБНИК ПО КУРСУ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА»

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Если случайные величины связаны линейной зависимостью

$$Y = aX + b$$

(a и b — постоянные) и случайная величина X имеет математическое ожидание $\mathrm{E}X$, то

$$\mathrm{E}Y = a\mathrm{E}X + b.$$

Доказательство. Пусть дискретная случайная величина X имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Если $X = x_k$, то

$$Y = a \cdot x_k + b.$$

Значит, распределение случайной величины Y имеет вид

$$Y \sim \begin{pmatrix} ax_1 + b & ax_2 + b & \ldots & ax_k + b & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}X = (ax_1 + b)p_1 + (ax_2 + b)p_2 + \ldots + (ax_k + b)p_k + \ldots =$$
$$= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k + \ldots) + b(p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots).$$

Сумма всех вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = 1,$$

значит,

$$\mathrm{E}Y = a\mathrm{E}X + b \cdot 1 = a\mathrm{E}X + b.$$

Следствие из свойства 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой постоянной:

$$\mathrm{E}b = b.$$

Чтобы доказать это, достаточно в свойстве 1 положить $a = 0$.

Пример 1. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} 28 & 30 & 32 & 34 & 36 \\ 0{,}52 & 0{,}08 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\mathrm{E}X$.

Решение. Упростим задачу. Найдем математическое ожидание случайной величины

$$Y = \frac{1}{2}X - 14,$$

которая имеет распределение

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}52 & 0{,}08 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{E}Y = 0 \cdot 0{,}52 + 1 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}28.$$

Осталось выразить X через Y. Получится:

$$X = 2Y + 28.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}X = 2\mathrm{E}Y + 28 = 2 \cdot 1{,}28 + 28 = 30{,}56.$$

Свойство 2. Если случайные величины X и Y имеют математические ожидания, то математическое ожидание суммы этих величин существует:

$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y.$$

Доказательство дадим для совместного распределения, где X принимает два, а Y — всего три значения (рис. 134).

X \ Y	y_1	y_2	y_3
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

Рис. 134

Тогда

$$\mathrm{E}(X + Y) = \\ = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_1 + y_3)p_{13} + \\ + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} + (x_2 + y_3)p_{23}.$$

Приведем подобные слагаемые с x_i и с y_j по отдельности:

$$\mathrm{E}(X + Y) = \\ = x_1(p_{11} + p_{12} + p_{13}) + x_2(p_{21} + p_{22} + p_{23}) + \\ + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}) + y_3(p_{13} + p_{23}).$$

Сумма $(p_{11} + p_{12} + p_{13})$ равна $\mathrm{P}(X = x_1)$.

Сумма $(p_{21} + p_{22} + p_{23})$ равна $\mathrm{P}(X = x_2)$.

Точно так же, рассуждая о вероятностях значений Y, получаем:

$$\mathrm{E}(X+Y) = \underbrace{x_1\mathrm{P}(X = x_1) + x_2\mathrm{P}(X = x_2)}_{\mathrm{E}X} + \\ + \underbrace{y_1\mathrm{P}(Y = y_1) + y_2\mathrm{P}(Y = y_2) + y_3\mathrm{P}(Y = y_3)}_{\mathrm{E}Y} = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y.$$

Конец доказательства.

Доказательство в общем виде можно провести таким же способом, считая число слагаемых произвольным.

Пример 2. Одновременно бросают две игральных кости: одну в форме куба, другую в форме правильного 20-гранника — икосаэдра (см. рис. 133 на с. 163). Найдем математическое ожидание суммы выпавших очков.

Решение. Пусть на кубике выпало X очков, а на икосаэдре — Y очков. $\mathrm{E}X = 3{,}5$ (см. пример 5 на с. 154). Аналогично в силу симметрии находим, что $\mathrm{E}Y = 10{,}5$. Тогда

$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y = 3{,}5 + 10{,}5 = 14.$$

Свойство 2 верно не только для двух, но и для произвольного количества случайных величин.

Пример 3. Предположим, что игральный кубик бросают 12 раз. Каждая из случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ может принимать значения от 1 до 6 с одинаковыми вероятностями $\frac{1}{6}$.

Все эти величины имеют одинаковое математическое ожидание:

$$\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2 = \ldots = \mathrm{E}X_{12} = 3{,}5$$

(см. пример 5 на с. 154). Сумма этих величин

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12}$$

тоже случайная величина, которая может принимать натуральные значения от 12 до 72, но уже с неравными вероятностями, которые непросто вычислить. Но чтобы найти математическое ожидание $\mathrm{E}Y$, нам не нужно знать, чему равны эти вероятности. В соответствии со свойством 2

$$\mathrm{E}Y = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots + \mathrm{E}X_{12} = 12 \cdot 3{,}5 = 42.$$

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 4. (*Задача о совпадениях.*) У дежурной в гостинице доска с n ключами. Каждый ключ имеет номер и висит на крючке под этим же номером (рис. 135). Однажды доска упала, и все ключи рассыпались. Дежурная собрала ключи, но в спешке развесила их в случайном порядке. Каково математическое ожидание числа ключей, которые оказались на своих крючках?

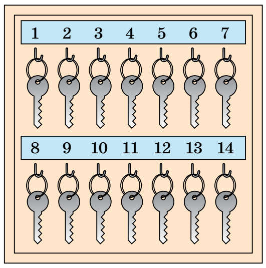

Рис. 135

Решение. Найти распределение случайной величины X «количество ключей на своих крючках» непросто. Но мы поступим иначе. Введем индикаторы I_k событий «k-й ключ оказался на своем крючке». Всего получается n индикаторов, и каждый имеет распределение

$$I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

поскольку вероятность события «k-й ключ попал на свой крючок» равна $\frac{1}{n}$ в силу равновозможности.

Каждый индикатор — бинарная случайная величина, поэтому математическое ожидание каждого индикатора равно $\frac{1}{n}$ (см. с. 154). Случайная величина X «общее число совпадений» равна сумме индикаторов:

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$

Пользуясь свойством 2, находим:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Получается, что в среднем в случайной перестановке ровно одно совпадение независимо от того, сколько элементов в перестановке.

На этом примере мы проиллюстрировали общий и интересный прием вычисления математических ожиданий. Нужно представить случайную величину в виде суммы более простых случайных величин, математические ожидания которых найти легко.

Математическое ожидание произведения случайных величин

Свойство 2 гласит, что математические ожидания можно складывать. Можно ли их умножать? Да, но только если случайные величины независимы. Сформулируем это утверждение в виде свойства.

Свойство 3. Если случайные величины X и Y имеют математические ожидания и независимы, то

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$

Доказательство проведем в случае, когда величины X и Y обе принимают по два значения. Этого достаточно, чтобы понять, как проводятся рассуждения в общем случае. Воспользуемся таблицей совместного распределения, где сразу составим маргинальные распределения (рис. 136).

X \ Y	y_1	y_2	Распределение X
x_1	ρ_{11}	ρ_{12}	p_1
x_2	ρ_{21}	ρ_{22}	p_2
Распределение Y	q_1	q_2	

Рис. 136

Запишем математическое ожидание произведения:

$$\mathrm{E}(XY) = x_1y_1\rho_{11} + x_1y_2\rho_{12} + x_2y_1\rho_{21} + x_2y_2\rho_{22}.$$

Случайные величины независимы, поэтому $\rho_{11} = p_1q_1$, и такие же равенства верны для других пар вероятностей. Следовательно,

$$\mathrm{E}(XY) = x_1y_1p_1q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_1p_2q_1 + x_2y_2p_2q_2.$$

Перегруппируем слагаемые:

$$x_1p_1(y_1q_1 + y_2q_2) + x_2p_2(y_1q_1 + y_2q_2) =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$

Утверждение доказано:

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$

Сколько бы значений ни принимали случайные величины X и Y, рассуждения при доказательстве такие же, как в этом частном случае.

Приведем два примера. В одном мы сможем воспользоваться умножением математических ожиданий, а в другом — нет.

Пример 5. Средняя загрузка самолета 120 пассажиров, средняя масса пассажира 70 кг, средняя масса багажа у пассажира 18 кг. Найдем общую среднюю загрузку самолета.

Пусть X — масса пассажира, Y — масса его багажа и Z — число пассажиров. Тогда общая загрузка самолета равна

$$W = (X + Y)Z.$$

Это случайная величина, и нужно найти ее математическое ожидание.

Масса пассажира X и масса его багажа Y не зависят от числа пассажиров Z. Поэтому

$$\mathrm{E}W = \mathrm{E}((X + Y)Z) = (\mathrm{E}X + \mathrm{E}Y) \cdot \mathrm{E}Z =$$
$$= (70 + 18) \cdot 120 = 10\,560 \text{ кг}.$$

Пример 6. Среднее время, которое автобус проводит на маршруте, составляет 3 ч, а протяженность маршрута равна 120 км. Сможем ли мы найти среднюю скорость автобуса?

Возьмем две случайные величины: V «скорость автобуса в км/ч» и T «время в пути в ч». Тогда $VT = 120$.

Перейдем в этом равенстве к математическим ожиданиям: $\mathrm{E}(VT) = 120$. Величины V и T не являются независимыми, поскольку время в пути зависит от скорости. Поэтому равенство

$$\mathrm{E}(VT) = \mathrm{E}V \cdot \mathrm{E}T,$$

скорее всего, неверно. Значит, нельзя утверждать, что $\mathrm{E}V \cdot \mathrm{E}T = 120$ и что средняя скорость автобуса равна 40 км/ч.

Математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий для независимых случайных величин.

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий всегда, даже если слагаемые не являются независимыми.

Вопросы

1. Известно, что математическое ожидание случайной величины X существует. Следует ли отсюда, что существует математическое ожидание случайной величины $-X$?
2. Чему равно математическое ожидание постоянной величины a?
3. Сформулируйте три свойства математического ожидания.
4. В каком случае математическое ожидание суммы можно находить по слагаемым?
5. В каком случае математическое ожидание произведения можно находить как произведение математических ожиданий случайных множителей?

6. Для случайных величин X и Y известно, что

$$E(XY) = EX \cdot EY.$$

Следует ли отсюда, что случайные величины X и Y независимы?

7. Выразите $E(X - Y)$ через EX и EY.

8. Математическое ожидание суммы $X + Y$ существует. Можно ли утверждать, что существуют числа EX и EY? Если нельзя, то приведите пример, когда это не так.

Задачи

362. Известно, что $EX = -2$ и $EY = 5$. Найдите:
а) $E(X + 4)$; б) $E(1{,}5Y - 0{,}5)$;
в) $E(Y - X)$; г) $E(0{,}5X + 2Y)$.

363. Известны распределения случайных величин X и Y:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix};$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 4 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}45 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

Найдите:
а) $E(Y + 4{,}5)$; в) $E(2X + 4Y)$;
б) $E(X - Y)$; г) $E(0{,}25X - 3Y)$.

364. Дана таблица совместного распределения случайных величин X и Y (табл. 36). Найдите:
а) $E(X + Y)$; б) $E(X - Y)$;
в) $E(2X - 3Y + 1)$.

Таблица 36

Y \ X	0	1	2
1	0,3	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,2

365. Монету бросили 9 раз. Пусть X — число выпавших орлов, а Y — число выпавших решек. Вычислите математическое ожидание суммы $X + Y$.

366. В ящике 49 шаров с номерами от 1 до 49. Из ящика вынимают 6 случайных шаров. Вычислите математическое ожидание суммы чисел на вынутых шарах, если:
а) каждый шар возвращается в ящик;
б) вынутые шары не возвращаются.

367. Из 27 игральных кубиков сложен куб, причем положение каждого из кубиков случайное (рис. 137).

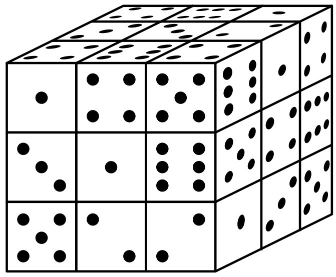

Рис. 137

а) Найдите математическое ожидание числа шестерок, которые оказались на поверхности куба.

б) Найдите математическое ожидание суммы чисел, которые оказались на поверхности куба.

368. Случайные величины X и Y — результаты двух независимых бросков игральной кости. Что больше: математическое ожидание площади прямоугольника со сторонами X и Y или математическое ожидание площади квадрата со стороной X?

369. Плиточник выкладывает пол в кухне (10 плиток в ширину и 12 плиток в длину), случайным образом чередуя белые и черные плитки. Сколько окажется швов между плитками одного цвета? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

370. По кругу в случайном порядке выложили 50 зеленых и 50 красных карточек. Найдите математическое ожидание числа зеленых карточек, рядом с которыми лежит хотя бы одна красная карточка.

371. Приведите пример двух случайных величин, которые не являются независимыми, однако произведение их ожиданий равно ожиданию произведения.

372. Игральный кубик бросили некоторое число раз, и сумма всех выпавших очков оказалась равна в точности 105. Найдите математическое ожидание случайной величины X «число сделанных бросков».