# 9 декабря. Занятие 9

## Повторение. Геометрическая вероятность

**1.** На станции МЦК "Крымская" первый поезд в направлении по часовой стрелке отходит в 05:44. В 05:49 от "Крымской" отходит первый поезд в противоположном направлении. Далее поезда в каждую сторону ходят каждые 6 минут. Пассажир садится на станцию "Крымская" в случайный момент времени (в пределах времени работы станции), и ему всё равно, в какую сторону ехать, поэтому он уедет первым же поездом. Какова вероятность того, что он поедет в направлении по часовой стрелке?

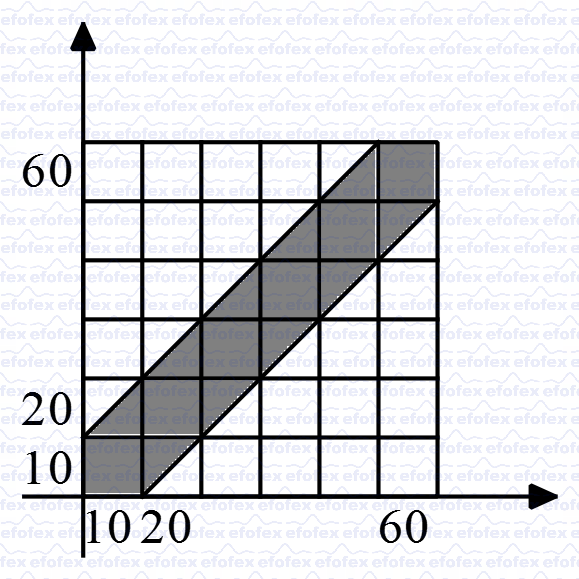
Ответ: 1/6.

Решение: Разница между отправлением первого поезда по часовой стрелке и первого поезда против часовой стрелки – 5 минут. Ещё через 1 минуту подойдёт следующий поезд по часовой стрелке, и 6-минутный цикл повторится. Если пассажир придёт в течение первых 5 минут 6-минутного интервала между поездами по часовой стрелке, то он уедет на пришедшем поезде против часовой стрелки. Только если он придёт в течение шестой минуты, то он уедет на подошедшем поезде по часовой стрелке. Т.е. из каждого 6-минутного интервала только 1 минута соответствует тому, что пассажир уедет на поезде по часовой стрелке.

**2.**Серёжа и Женя договорились встретиться в метро в третьем часу дня. Серёжа приходит на место встречи между двумя и тремя часами дня, ждёт 10 минут и уходит. Женя поступает точно так же. Какова вероятность того, что они встретятся?

Ответ: 11/36.

Решение: Рассмотрим два случайных момента времени после 14:00 – время прихода Серёжи и время прихода Жени, они лежат между 0 (14:00) и 60 минутами (15:00). Отметим один из них по оси , а другой – по оси . Шаг сетки равен 10 минутам.

Изобразим на диаграмме область, которая соответствует тому, что Серёжа и Женя встретятся. Площадь закрашенной области равна 11 клеточкам, а всего их 36. Отсюда находим ответ.

**3**. Тофсла и Вифсла прячут чемодан от Морры в случайной точке прямоугольной поляны размером  м. Морра видит чемодан, только если он находится от неё на расстоянии не более 1 м. Она встаёт на край поляны. Какова наибольшая вероятность того, что Морра не увидит чемодан?

Ответ: .

Решение: Вероятность будет максимальна тогда, когда часть поляны, которую видит Морра, будет минимальна. Это случится тогда, когда Морра встанет в угол поляны. При этом область зрения Морры на поляне – это четверть круга радиуса 1 м (пересечение круга и прямоугольной поляны). Её площадь равна . Доля её площади к площади всей поляны – это . Это вероятность того, что Морра увидит чемодан (т.е. он попадёт в её область зрения). Соответственно, вероятность того, что Морра чемодан не увидит, равна .

**4**. Взяты случайным образом независимо друг от друга два числа  и  из отрезка . Найдите вероятность того, что:

а) ;

б) .

Ответ: а) 2/3; б) 1.

Решение: а) Здесь уместно сделать рисунок: построим на плоскости область решений неравенства  и отметим пересечение этой области с квадратом .

б) Поскольку  и  не превосходят 1, то  не превосходит 5, поэтому такое неравенство всегда будет выполнено.

## Комбинаторика 1. Перестановки, правило умножения. Факториал.

**1.** Сколькими способами можно поставить в ряд: а) трёх; б) пятерых детей?

Ответ: а) ; б) .

Решение: Для любого числа  количество способов поставить в ряд  (различных) детей равно . Действительно, первого ребёнка в ряду мы можем выбрать  способами, второго –  способом (так как один ребёнок уже выбран), третьего –  способами (так как два ребёнка уже выбраны), и так далее. Предпоследнего ребёнка мы можем выбрать двумя способами, а последнего – только одним способом (так как все остальные уже выбраны). По правилу умножения для получения общего числа способов нужно перемножить полученные результаты: .

**2.** Сколькими способами можно поставить в хоровод: а) 8; б)  детей?

Ответ: а) ; б) .

Решение: Представим, что  детей встали в хоровод, а затем разомкнули руки и встали в ряд. Для каждого хоровода из  детей есть  мест, где хоровод разомкнётся, и, соответственно,  способов получить ряд. Получаем из каждого хоровода  различных рядов (в зависимости от места, где хоровод разомкнётся). Заметим, что из разных хороводов не может получиться один и тот же ряд (потому что тогда эти хороводы совпадают с точностью до поворота вокруг центра). Получается, что число хороводов из  детей в  раз меньше, чем число рядов из этого же количества детей. Отсюда получаем ответ.

**3.**Код IATA аэропорта Анадыри – DYR, Воркуты – VKT, а Нерюнгри – CNN. Код аэропорта IATA состоит из трёх латинских букв. Сколько всего возможных кодов аэропортов можно составить? (В латинском алфавите 26 букв).

Ответ: .

Решение: Каждую из трёх букв можно выбрать 26 способами. По правилу умножения общее число способов равно .

**4**. Автомобильные номера в России выглядят следующим образом: буква, 3 цифры, две буквы и код региона. Кодов Москвы 8: 77, 97, 99, 177, 197, 199, 777 и 799. Буквы разрешено использовать только следующие: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х. (Подумайте, почему).

Сколько всего номеров могут быть выданы в городе Москва?

Ответ: .

Решение: Каждую из трёх букв можно выбрать 12 способами, каждую из трёх цифр – 10 способами, и есть 8 способов выбрать код региона. Отсюда по правилу умножения получаем результат.

**5**. Сколько существует:

а) трёхзначных;

б) четырёхзначных;

в) шестизначных;

г) 2019-значных чисел-палиндромов, которые одинаково читаются слева направо?

Ответ: а) ; б) ; в) ; г) .

Решение: Можно сразу решить задачу в общем случае (для количества -значных чисел-палиндромов). Назовём центром числа: для числа с чётным числом цифр – промежуток между двумя средними по счёту цифрами, а для числа с нечётным числом цифр – среднюю по счёту цифру. Первая половина цифр (до центра числа включительно) может браться произвольно, а остальные – задаются однозначно, поскольку совпадают с цифрами, стоящими на местах, симметричных относительно центра числа. Поэтому для  и  имеем  цифр, которые можно выбирать произвольно с тем лишь условием, что первая цифра не может быть нулём (и поэтому для неё 9 вариантов), а для каждой из оставшихся  есть 10 вариантов. Отсюда по правилу умножения получаем результат.

**6**. У Лёши есть 12 разных красок. Он хочет раскрасить 6 новогодних шаров. Сколькими способами он может раскрасить 6 шаров, если:

а) все шары должны быть разного цвета; б) цвета могут повторяться?

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) Для первого шара Лёша может выбрать любую из 12 красок, для второго шара – любую из оставшихся 11, для третьего – любую из оставшихся 10, и так далее: для шестого – любую из оставшихся 7.

б) Для каждого из 6 шаров Лёша может выбрать любую из 12 красок.

**7.** В группе детского сада 8 мальчиков и 12 девочек. Воспитательница выдаёт каждому из них картинку для раскрашивания. У неё 8 разных картинок со снеговиками (для мальчиков) и 12 разных картинок с новогодними украшениями (для девочек). Сколькими способами она может дать каждому ребёнку по картинке?

Ответ: .

Решение: Для каждого из способов раздать картинки мальчикам есть  способов раздать картинки девочкам. Поэтому эти два числа нужно перемножить.

**8**. Сколько можно составить различных гирлянд из 30 лампочек, если лампочки могут быть синими, красными, жёлтыми и белыми и две соседние лампочки не могут быть одинакового цвета? Считаем, что начало и конец гирлянды различны – в начале гирлянды есть электрическая вилка.

Ответ: .

Решение: Первую лампочку мы можем выбрать четырьмя способами, а каждую из 29 следующих – тремя (так как она не должна совпадать по цвету с предыдущей).

**9.** Из слова РОТ перестановкой букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами.

а) Сколько анаграмм можно составить из слова КОМПОТ?

б) Сколько анаграмм можно составить из слова МАТЕМАТИКА?

Ответ: а) 360; б) 75600.

Решение: а) Предположим, что в слове КОМПОТ мы первую букву О написали красным карандашом, а вторую – синим. Теперь в этом слове все буквы различны, и число перестановок его букв (то есть число анаграмм) равно . Теперь все анаграммы с цветными буквами О мы можем разбить на пары одинаковых, например: ПОМТОК, ПОМТОК  ПОМТОК. Получается, что анаграмм слова КОМПОТ в  раза меньше, чем анаграмм слова КОМПОТ. Здесь  – это число перестановок букв О и О.

б) Будем рассуждать аналогичным образом. Всего анаграмм слова МАТЕМАТИКА – . Теперь в полученных анаграммах мы можем менять местами одинаковые буквы разного цвета и получать ту же анаграмму слова МАТЕМАТИКА. Число способов это сделать для каждой анаграммы слова МАТЕМАТИКА равно , так как у нас есть  способов переставить буквы М и М,  способов переставить буквы А, А и А и  способов переставить буквы Т и Т. Получаем, что число анаграмм слова МАТЕМАТИКА в  раза меньше числа анаграмм слова МАТЕМАТИКА.

**10.** На прямой отмечено 6 различных точек, а на параллельной ей прямой – 7 различных точек.  
Сколько существует  а) треугольников;  б) четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: а) 231; б) 315.

Решение: а) Вначале будем брать по одной точке с первой прямой и по две – со второй. Выбрать одну точку с первой прямой мы можем 6 способами. Выбрать первую точку со второй прямой мы можем 7 способами, а вторую – 6 способами. При этом если мы выбрали сначала точку , а потом точку  или выбрали сначала точку , а потом точку , то пара точек, входящих в треугольник, осталась той же. Поэтому число пар будет равно , а число таких треугольников равно . Теперь будем брать две точки с первой прямой и одну – со второй. Выбрать пару точек с первой прямой мы можем  способами, а одну точку со второй прямой – 7 способами. Таких треугольников получается . Итого получаем  треугольник.

б) Чтобы получить четырёхугольник, необходимо взять две точки с первой прямой и две – со второй (подумайте, почему). Выбрать две точки с первой прямой мы можем  способами, а выбрать две точки со второй прямой –  способами. Отсюда общее число способов равно .

Надежда Сошитова