# 3 февраля. Занятие 15

## Математическое ожидание.

**1.** Даны две случайные величины и их распределения: , .

Найдите математические ожидания следующих величин: а) ; б) ; в) ; г) ; д) .

Ответ: а) -0,1; б) 0; в) 0,2; г) 1,3; д) 0,5.

Решение: Построим распределение величин  и :  и .

а) По определению ; б) ; в) По свойству математического ожидания ; г) ; д) .

**2.** Монету бросают 10 раз. Найдите математическое ожидание числа выпавших орлов.

Ответ: 5.

Решение: Эту задачу можно решать "в лоб": построить распределение случайной величины "число выпавших орлов" (это будет долго и муторно, а также велик риск ошибки в расчётах), а затем вычислить по определению математическое ожидание (и ещё один риск ошибки в расчётах). Предлагаю пойти по другому пути.

Обозначим за  число выпавших орлов. Введём 10 случайных величин  – индикаторы того, что при -ом броске выпал орёл (т.е. , если при -ом броске выпал орёл, и , если выпала решка). Тогда  для всех . Все эти величины имеют одинаковое математическое ожидание .

Заметим, что , так как каждый выпавший при очередном броске орёл даёт вклад 1 в сумму индикаторов, то есть их сумма как раз равна числу орлов. В этом равенстве перейдём к математическим ожиданиям: .

Что это означает? Это означает, что если бросить монету 10 раз, то можно ожидать, что число выпавших орлов будет около 5.

**3.** Дано распределение случайной величины . Найдите . Сравните полученное значение со значением . Что вы замечаете?

а) ; б) .

Ответ: а) , ; б) , .

Решение: а) По определению . Значит, . Для того, чтобы найти математическое ожидание величины , необходимо построить её распределение: . Отсюда .

б) Аналогично . Значит, . Для того, чтобы найти математическое ожидание величины , необходимо построить её распределение: . Отсюда .

Заметим, что в обоих случаях . Можно показать, что такое равенство верно для любой случайной величины, у которой существуют указанные математические ожидания.

**4**. Ася и Вася вырезают прямоугольники из клетчатой бумаги. Вася ленивый; он кидает игральную кость один раз и вырезает квадрат, сторона которого равна выпавшему числу очков, увеличенному на 1. Ася кидает кость дважды и вырезает прямоугольник с длиной и шириной, равными выпавшим числам, увеличенным на 1. У кого математическое ожидание площади прямоугольника больше?

Ответ: У Аси математическое ожидание площади равно , а у Васи – . У Васи получается больше.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 2 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| 3 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |
| 4 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| 5 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 |
| 6 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 |

Решение: Обозначим за  и  случайные величины, обозначающие площади вырезанных фигур у Аси и Васи соответственно. Построим их распределения. Начнём с Васи. В этом случае есть 6 равновероятных исходов следующего вида: если на кубике выпало 1, то Вася вырезает квадрат площадью 4, если выпало 2 – площадью 9, если выпало 3 – площадью 16, и так далее. Если выпало 6 очков, то он вырезает квадрат площадью 49. Получается . Отсюда . Теперь посмотрим, как дела у Аси. Построим таблицу элементарных исходов, где для каждых двух бросков кубика запишем площадь прямоугольника, который в этом случае вырезает Ася. Получаем, что величина  принимает каждое из этих значений с вероятностью . Для того, чтобы вычислить её математическое ожидание, достаточно сложить все её значения и разделить на 36. Подсчитаем сумму чисел в первой строке, вынося множитель 2 (так как на второй кости выпало 1 очко, все очки первой кости, увеличенные на 1, умножаются на 2): . Точно так же сумма очков во второй строчке равна , и так далее. Сумма очков в последней строке равна . Теперь сложим эти суммы по строкам, заметив, что выражение в скобках у них у всех одинаковое. Получится . Отсюда . Таким образом, математическое ожидание площади квадрата Васи больше математического ожидания прямоугольника Аси.

Заметим, что математическое ожидание периметров фигур Аси и Васи одинаково, а среди всех прямоугольников с равными периметрами наибольшую площадь имеет квадрат.

**5**. За контрольную работу Артём может получить оценку от 2 до 5. Вероятность того, что оценка будет 2, равна 0,15. Вероятность того, что оценка будет не больше 3 – 0,45, не больше 4 – 0,75. Найдите математическое ожидание оценки Артёма за контрольную работу.

Ответ: Обозначим случайную величину "оценка Артёма за контрольную работу" за . Тогда  и .

Решение: По условию вероятность того, что Артём получит 2, равна 0,15, а вероятность того, что он получит не более 3 (то есть 2 или 3), равна 0,45. Значит, он получит 3 с вероятностью . Такими же рассуждениями получаем, что он получит 4 с вероятностью 0,3 и 5 с вероятностью 0,25. Отсюда составляем распределение случайной величины  и находим её математическое ожидание. . Это означает, что Артём может ожидать оценку, близкую к 3,65 (скорее всего, он получит 3 или 4, эти значения более вероятны, чем другие).

**6.** а) В торговом центре два автомата продают кофе. В течение дня первый автомат ломается с вероятностью 0,25, а второй – с вероятностью 0,35. Каждый вечер приходит механик Петрович и чинит все сломанные автоматы. Оплата его труда зависит от количества актов ремонта, которое он указывает в отчёте за неделю. Однажды Петрович написал в отчёте, что математическое ожидание поломок в неделю равно 6. Докажите, что Петрович преувеличивает.

б) В торговом центре три автомата продают кофе. В течение дня первый автомат ломается с вероятностью 0,25, а второй – с вероятностью 0,35. Каждый вечер приходит механик Петрович и чинит все сломанные автоматы. Оплата его труда зависит от количества актов ремонта, которое он указывает в отчёте за неделю. Однажды Петрович написал в отчёте, что математическое ожидание поломок в неделю равно 13. Докажите, что Петрович преувеличивает.

Ответ: а) Математическое ожидание числа поломок за неделю равно .

б) Математическое ожидание числа поломок за неделю не превосходит .

Решение: Механик Петрович каждый вечер чинит сломанные автоматы (если таковые имеются), поэтому на следующий день случайный эксперимент получается таким же, как и в предыдущие, с той же вероятностью поломки для каждого из автоматов.

Введём набор индикаторов  и  для . Пусть , если в -ый день недели сломается первый автомат, и , если не сломается. Точно так же , если в -ый день недели сломается второй автомат, и , если не сломается. Их распределения выглядят следующим образом:  и . Значит,  и  для всех  от 1 до 7. Отсюда  для всех .

а) Ожидаемое число поломок обоих автоматов за 1 день равно 0,6. Значит, ожидаемое число поломок за 7 дней равно , что меньше 6.

б) Так же, как в пункте а), ожидаемое число поломок первых двух автоматов за 1 день равно 0,6. Ожидаемое число поломок (математическое ожидание числа поломок) третьего автомата за 1 день не превосходит 1 (так как автомат чинят только 1 раз в день, и, значит, он не может сломаться более 1 раза). Значит, ожидаемое число поломок всех автоматов за 1 день не превосходит 1,6, а за 7 дней – не превосходит , что меньше 13.

**7.** (См. задачу 8 с прошлого занятия) Билет лотереи "4 из 21" стоит 100 рублей. В билете 21 номер: от 1 до 21. Участник лотереи покупает билет и зачёркивает в нём 4 номера на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи: случайным образом выпадают 4 номера. Выигрыш зависит от числа угаданных номеров (см. таблицу).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Угаданных номеров | 2 | 3 | 4 |
| Выигрыш, руб. | 100 | 4 000 | 400 000 |

а) Вычислите (округлённо) математическое ожидание величины  "выигрыш участника с учётом цены билета".

б) Как вы считаете, имеет ли смысл участвовать в такой лотерее?

Ответ: а) .

б) Поскольку математическое ожидание выигрыша отрицательно, участвовать в такой лотерее не следует. Заметьте, при покупке билета за 100 рублей каждый участник теряет в среднем 130 рублей.

Решение: а) На прошлом занятии было построено (на самом деле приближённо, так как использовалось округление) распределение : . Отсюда можно найти математическое ожидание: .

**8.** Стрелок стреляет в мишень до тех пор, пока не поразит её. Вероятность попадания при каждом выстреле равна  и не зависит от результатов предыдущих выстрелов. Рассмотрим случайную величину  "число сделанных выстрелов". Найдите .

Ответ: .

Решение: Обозначим события "первые  выстрелов неудачные" и индикаторы . Событие  означает, что произошло событие  и при этом не произошло событие . Нас интересует вероятность .

Стрелок делает -ый выстрел только в том случае, если при предыдущих  выстрелах он ни разу не попал в мишень, т.е. произошло событие . Строго говоря, это означает, что . При этом . Отсюда по формуле полной вероятности

.

Из мы видим, что каждая следующая вероятность получается из предыдущей умножением на , и при этом . Тогда .

Значит, можно построить распределение индикаторов: . Отсюда .

Рассмотрим сумму  и покажем, что она равняется . Действительно: предположим, что , то есть пятый выстрел стрелка оказался удачным (а предыдущие 4 – неудачные). Тогда , а все остальные индикаторы, начиная с , равны 0 (так как 5 выстрел удачный). Значит,  будет равна , как и . Рассуждая таким образом для других случаев, понимаем, что . Переходим к математическим ожиданиям:

.

Предпоследнее равенство верно, так как это формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Надежда Сошитова