# 27 января. Занятие 14

## Случайные величины и распределения (продолжение).

**1.** Игральную кость бросают два раза. Постройте распределение произведения выпавших очков.

Ответ: .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

Решение: Построим таблицу исходов случайного эксперимента и в каждой клеточке таблицы (соответствует одному элементарному исходу) запишем результат – произведение выпавших очков.

Заметим, что все элементарные исходы равновероятны и вероятность каждого равна 1/36. Подсчитаем, например, вероятность того, что произведение выпавших очков равно 12 (см. рис.). Таких исходов всего 4. Следовательно, вероятность такого события равна 4/36. Аналогичным образом вычисляются и остальные вероятности.

**2.** У Коли 10 машинок – 5 легковых и 5 джипов. Он берёт наугад три машинки. Постройте распределение случайной величины "число джипов среди выбранных машинок".

Ответ: .

Решение: Случайная величина "число джипов среди выбранных машинок" может принимать значения 0, 1, 2 или 3. Необходимо найти вероятности каждого из этих значений. 0 джипов будет с вероятностью . 1 джип будет с вероятностью . Заметим, что из соображений симметрии вероятность 2 джипов из 3 машинок равна вероятности 2 легковых (и 1 джипа, соответственно) из 3 машинок, и так же для 3 джипов вероятность равна вероятности 0 джипов. Отсюда получается распределение.

**3.** Даны две случайные величины и их распределения: , .

а) Найдите  и .

б) Постройте распределения случайных величин и  при условии независимости величин  и .

Ответ: а) , .

б) ; .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   | -1 | 1 | 2 |
| -2 | 0,06 | 0,03 | 0,01 |
| 0 | 0,42 | 0,21 | 0,07 |
| 1 | 0,12 | 0,06 | 0,02 |

Решение: а) Для любой случайной величины сумма вероятностей всех её значений (сумма всех значений в нижней строчке) равна 1. Отсюда легко находятся  и .

б) Предположим, что величины  и  независимы. Тогда для каждой конкретной пары их значений мы можем найти её вероятность – она будет равна произведению вероятностей отдельных значений для  и  (см. таблицу).

Теперь для каждой такой пары значений вычислим значение случайных величин  и . Для некоторых пар значений  и  значения суммы или произведения могут совпадать (а могут и не совпадать никогда). Это означает, что на некоторых элементарных исходах

величина  (или ) принимает одинаковое значение, поэтому вероятность этого значения равна сумме вероятностей всех элементарных исходов, на которых она принимает это значение. Отсюда получаются распределения.

**4.** Монету бросают 10 раз. Составьте распределение случайной величины  "сумма числа выпавших орлов и числа выпавших решек".

Ответ: .

Решение: Сумма числа выпавших орлов и решек – это постоянная величина, всегда равная 10 (то есть с вероятностью 1).

**5.** Стрелок стреляет в мишень до тех пор, пока не поразит её. Вероятность попадания при каждом выстреле равна  и не зависит от результатов предыдущих выстрелов. Рассмотрим случайную величину  "число сделанных выстрелов".

а) Какие значения принимает ?

б) Составьте распределение .

Ответ: Обозначим . Тогда .

Решение: а) Ясно, что  может принимать любое натуральное значение.

б)  принимает значение 1 тогда, когда первый же выстрел оказался успешным. Вероятность этого равна . Найдём вероятность . Стрелку потребуется ровно  выстрелов тогда, когда все предыдущие  выстрелов неудачные (вероятность этого равна ), а последний, -ый выстрел оказался удачным (вероятность этого равна по-прежнему ). Значит, .

**6**. Дано распределение случайной величины . Постройте распределение случайной величины .

а) ; б) .

Ответ: а) ; б) .

Решение: На каждом из элементарных исходов нам известно значение величины , а значит, мы можем вычислить значение величины  на том же самом элементарном исходе. Заметим, что, в отличие от случая с , значения на разных элементарных исходах не повторяются.

**7**. В коробке 10 синих и 8 красных фломастеров. Из коробки достают случайным образом 4 фломастера. Постройте распределение случайной величины "число синих фломастеров".

Ответ: .

Решение: Всего  способов выбрать 4 фломастера из 18. Подсчитаем, сколько из них соответствуют 0, 1, 2, 3 и 4 синим фломастерам. Для  синих фломастеров получается  способов.

Отсюда вероятность 0 синих фломастеров равна ., вероятность 1 синего фломастера равна , вероятность 2 синих фломастеров равна

, вероятность 3 синих фломастеров равна , а вероятность 4 синих фломастеров равна .

**8.** Билет лотереи "4 из 21" стоит 100 рублей. В билете 21 номер: от 1 до 21. Участник лотереи покупает билет и зачёркивает в нём 4 номера на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи: случайным образом выпадают 4 номера. Выигрыш зависит от числа угаданных номеров (см. таблицу).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Угаданных номеров | 2 | 3 | 4 |
| Выигрыш, руб. | 100 | 4 000 | 400 000 |

Составьте распределение случайной величины  "выигрыш участника с учётом цены билета".

Ответ: .

Решение: Выигрыш с учётом стоимости билета равен выигрышу игрока (или 0, если выигрыша нет) минус 100 рублей, затраченные на покупку билета.

Всего комбинаций из четырёх номеров . Предположим, что тираж произошёл, и известны 4 выигрышных номера (а участник лотереи ещё их не узнал и не проверил свой билет). Подсчитаем, сколько способов угадать 4, 3 или 2 номера. Угадать 4 номера можно только 1 способом, а угадать 3 –  способами (так как нужно выбрать 3 номера из 4 выигрышных и 1 номер из 17 невыигрышных). Угадать 2 номера можно  способами.

Найдём теперь вероятности этих событий. Обозначим за  количество угаданных номеров. , , . Последнюю вероятность найдём из правила, что сумма всех вероятностей в нижней строчке равна 1.

Надежда Сошитова