# 20 января. Занятие 13

## Повторение. Бинарная случайная величина (индикатор).

**1.** Игральную кость бросают два раза. Событие  состоит в том, что сумма выпавших очков кратна трём, а событие  – в том, что хотя бы одно из выпавших чисел кратно трём. Составьте распределения индикаторов , ,  и .

Ответ: ; ; ; .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |

Решение: Задача решается аналогично задаче 2 прошлого занятия. Построим таблицу с элементарными исходами, обозначим в ней событие  малиновым, а событие  – голубым (их пересечение отметим фиолетовым, а объединение – это просто все закрашенные хоть как-то клетки). Смотря на эту картинку, несложно подсчитать требуемые вероятности.

**2.** Игральную кость бросают три раза. Составьте распределение индикатора события  "не выпало ни одной тройки".

Ответ: .

Решение: Вероятность того, что при каждом из бросков не выпало тройки, равна 5/6. Результаты бросков, как мы помним, независимы. Поэтому вероятность того, что при трёх бросках не выпало ни одной тройки, равна произведению вероятностей того, что при каждом из бросков не выпало тройки. Таким образом, она равна . Соответственно, вероятность того, что выпала хотя бы одна тройка, равна .

**3.** У Наташи в коробке лежат новогодние шары трёх цветов: белые, золотые и красные, по 10 штук каждого цвета. Наташа достаёт из коробки 4 случайных шара. Составьте распределение индикатора события  "среди вынутых шаров нет белых".

Ответ: .

Решение: Всего возможностей выбрать 4 шара из всех 30 шаров – . Посчитаем, сколько из них комбинаций, в которых нет белых шаров.

Это ровно те комбинации, где мы выбираем 4 шара из остальных 20 – золотых и красных (поскольку подходят все комбинации количества золотых и красных шаров). То есть число способов равно . Значит, вероятность того, что среди вынутых шаров нет белых, равна . Соответственно, .

## Случайные величины и распределения.

**1.** Даны две случайные величины и их распределения: , .

а) Найдите  и .

б) Найдите возможные значения случайных величин и .

в) При каких условиях можно построить распределения случайных величин  и ? Постройте их распределения при этих условиях.

Ответ: а) , .

б), в) Распределения указанных случайных величины можно найти тогда, когда известно о независимости величин  и . В этом случае распределения таковы: ; .

Решение: а)  и  находятся из свойства случайной величины, состоящего в том, что сумма всех вероятностей в нижней строке (т.е. сумма вероятностей всех элементарных исходов) должна равняться 1.

б) Возможные значения : ; возможные значения : . Это просто суммы (произведения) всех возможных комбинаций значений величин  и .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 |
| -2 | 0,12 | 0,08 |
| 0 | 0,3 | 0,2 |
| 1 | 0,18 | 0,12 |

в) Предположим, что нам известно о независимости случайных величин  и . Тогда для построения распределения случайной величины  нам нужно найти вероятности, с которыми она принимает все свои значения (которые мы уже знаем). Построим таблицу элементарных исходов, по горизонтали выпишем возможные значения , а по вертикали – возможные значения . В каждой клеточке напишем вероятность соответствующего элементарного исхода. Она равна произведению вероятностей соответствующих элементарных исходов для  и , поскольку они независимы.

Теперь на каждом из элементарных исходов мы, зная значения величин  и  на нём, можем вычислить значение . Заметим, что в двух элементарных исходах (-1, 0 и 1, -2) сумма принимает одно и то же значение (-1). Вероятность первого из них равна 0,08, а другого – 0,3. Значит, . Заметим, что для остальных значений суммы совпадений нет.

Аналогичным образом проводим рассуждения для построения распределения .

**2.** Игральную кость бросают два раза. Постройте распределение величины:

а) сумма выпавших очков;

б) наибольшее из выпавших очков.

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) Рассмотрим таблицу элементарных исходов, в которой одним цветом выделены исходы с одинаковой суммой очков на кубиках. С её помощью несложно вычислить вероятности каждого из значений суммы.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |

б) Построим таблицу элементарных исходов, в которой одним цветом обозначены исходы с одинаковым максимальным числом очков (в случае, если результаты бросков одинаковы, это значение считаем максимальным).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |

**3.** Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет число очков, кратное трём. Рассмотрим случайную величину  "число сделанных бросков".

а) Какие значения принимает ?

б) Составьте распределение .

Ответ: .

Решение: а) Величина  может принимать любое натуральное значение.

б) Назовём бросок успешным, если именно на нём выпало число очков, кратное трём.

Найдём вероятность того, что . Это означает, что первый бросок успешный, вероятность этого равна 1/3 (так как из 6 элементарных исходов нам подходят два – 3 и 6).

Теперь найдём вероятность того, что , . Обозначим события "за  бросков ни разу не выпало числа, кратного трём". Событие  означает, что произошло событие  и при этом не произошло событие . Нас интересует вероятность .

Мы делаем -ый бросок только в том случае, если при предыдущих  бросках ни разу не выпало числа, кратного трём, т.е. произошло событие . Строго говоря, это означает, что  (и ). При этом  (и ). Отсюда по формуле полной вероятности

. 

Точно так же

.

Из мы видим, что каждая следующая вероятность получается из предыдущей умножением на 2/3, и при этом . Тогда . Отсюда из получаем, что .

**4**. Монету бросают 6 раз. Составьте распределение случайной величины  "число выпавших решек".

Ответ: ****, где .

Решение: Общее количество элементарных исходов в таком эксперименте равно . При этом все они равновероятны, поэтому вероятность каждого из исходов равна .

Предположим, что выпало  решек. Сколько всего таких исходов? Нужно выбрать  позиций из 6, на которых будут находиться решки (а на остальных – орлы). Это можно сделать  способами. Значит, вероятность того, что выпало  решек, равна **.**

**5**. Дано распределение случайной величины . Постройте распределение случайной величины .

а) ; б) .

Ответ: а) ; б) .

Решение: У данной случайной величины четыре значения. Всего есть четыре элементарных исхода с известными вероятностями, на которых эта величина принимает известные значения. Если мы знаем значение величины , то можем вычислить значение величины .

а) На первом элементарном исходе оно будет равно 9, на втором – 1, на третьем – 9 и на четвёртом – 25. Заметим, что величина  принимает значение 9 на двух элементарных исходах для  (-3 и 3); значит, вероятность значения 9 для  равна сумме вероятностей значений -3 и 3 для . б) Аналогично.

**6**. В коробке 6 синих и 8 красных фломастеров. Из коробки достают случайным образом 4 фломастера. Постройте распределение случайной величины  "число синих фломастеров".

Ответ: .

Решение: Случайная величина  может принимать значения от 0 до 4. Нам необходимо найти вероятности каждого из этих значений. Напомним, что количество способов выбрать  синих и  красных фломастеров из 6 синих и 8 красных равно , а число всех способов выбрать 4 фломастера из 14 равно . Осталось перебрать все  от 0 до 4. . .

. .

.

**7.** Билет лотереи "5 из 36" стоит 100 рублей. В билете 36 номеров: от 1 до 36. Участник лотереи покупает билет и зачёркивает в нём 5 номеров на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи: случайным образом выпадают 5 номеров. Выигрыш зависит от числа угаданных номеров (см. таблицу).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Угаданных номеров | 3 | 4 | 5 |
| Выигрыш, руб. | 100 | 10 000 | 4 000 000 |

Составьте распределение случайной величины  "выигрыш участника с учётом цены билета".

Ответ: .

Решение: Если участник угадывает все 5 номеров, то его выигрыш с учётом стоимости билета равен , если угадывает 4 – , если угадывает 3 – , а если угадывает меньше 3 – . Найдём вероятность каждого из этих событий.

. . .

.

**8.** Рассмотрим случайную величину "Рост взрослой женщины в европейской части России", выраженную в сантиметрах (с округлением до целого).

а) Как вы думаете, какие значения может принимать эта случайная величина?

б) Как примерно должна выглядеть диаграмма распределения этой случайной величины? Нарисуйте эскиз этой диаграммы и попробуйте объяснить, почему, по вашему мнению, она выглядит именно так, а не иначе.

Решение: а) Теоретически такая случайная величина может принимать почти любые значения, но практически – почти все значения находятся в диапазоне примерно 148 – 190. Средний рост женщины в России составляет 166-168 см. Самой высокой известной женщиной нашей страны является волейболистка Екатерина Гамова (202 см), самой низкой – участница дуэта "Тату" Юлия Волкова (154 см).

б)

Надежда Сошитова