# 23 декабря. Занятие 11

## Повторение. Комбинаторика 2. Сочетания, число сочетаний. Выбор из конечного набора.

**1.** В государстве всего 90 городов, некоторые из них соединены дорогами. Из каждого города в другие ведёт ровно 5 дорог. Сколько всего дорог в этом государстве?

Ответ: .

Решение: Посчитаем, сколько всего концов дорог в этом государстве: в каждом из 90 городов сходится 5 концов дорог. Итого . Но при этом у каждой дороги есть два конца, получается, что каждую дорогу мы посчитали два раза. Поэтому нужно разделить пополам.

**2.** Сколько всего существует способов разбить группу, в которой 30 человек, на 3 команды, в которых 8, 12 и 10 человек?

Ответ: .

Решение: Эта задача решается так же, как задача 7 из прошлого занятия.

**3.** Некто хочет купить 10 небольших новогодних подарков. Его выбор остановился на хлопушках, бенгальских огнях и декоративных свечах. Сколько существует различных наборов из этих подарков, в каждом из которых ровно 10 предметов, причем подарков каждого вида хотя бы по одному?

Ответ: .

Решение: Разложим содержимое каждого подарка в ряд: вначале все хлопушки, затем все бенгальские огни, и наконец – все свечи. Всего получится 10 предметов, и между ними есть две "перегородки" – между хлопушками и бенгальскими огнями и между бенгальскими огнями и свечами. Таким образом, нам нужно найти число способов выбрать 2 места для "перегородок" из 9 возможных.

**4.** Решите задачу 3, исключив условие о том, что каждого подарка хотя бы по одному.

Ответ: .

Решение: Добавим ещё три предмета – одну хлопушку, один бенгальский огонь и одну декоративную свечу. Таким образом, нужно посчитать количество наборов, в каждом из которых ровно 13 предметов, причем подарков каждого вида хотя бы по одному.

**5.** В магазинеесть много конфет восьми видов. Сколько можно сделать различных по составу новогодних подарков из 20 конфет в каждом так, чтобы в каждом подарке было хотя бы две конфеты каждого вида?

Ответ: .

Решение: Уберём из каждого подарка по одной конфете каждого вида. Останутся подарки из 12 конфет 8 видов, где конфет каждого вида – хотя бы по одной. Получается, из 11 мест нам нужно выбрать 7 "перегородок".

**6.** У Паши есть одинаковые кости домино без точек. Он хочет выстроить из них цепочку длиной 10. Сколько существует способов это сделать, выкладывая домино горизонтально и вертикально в разном порядке? Один из способов показан на рисунке.



Ответ: .

Решение: Решим задачу в общем виде: представим, что у нас есть какая-то фигура из домино длины . Рассмотрим последнюю кость домино. Предположим, она стоит вертикально. Тогда остальные доминошки составляют фигуру, построенную по тем же правилам, но длины . Теперь предположим, что последняя доминошка стоит горизонтально. Тогда остальные кости домино составляют фигуру, построенную по тем же правилам, но длины . Получается, что всего фигур длины  столько же, сколько фигур длины  и фигур длины .

Теперь посмотрим на начальные значения (см. таблицу).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Длина фигуры | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |  |  |
| Количество фигур | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |  |  |  |

Фигура длины 1 всего одна: это доминошка, стоящая вертикально. Фигур длины 2 уже две: доминошка, стоящая горизонтально, или две доминошки, стоящие вертикально. Далее можно воспользоваться выражением числа фигур через два предыдущих значения.

Получилась последовательность чисел Фибоначчи, но со сдвигом на 1. Она определяется следующим образом: , где  и . Легко увидеть, что числа в таблице – это и есть числа Фибоначчи.

## Комбинаторика в вероятностных задачах.

**1.** В -угольнике некто проводит две случайные диагонали. Какова вероятность того, что эти диагонали имеют общий конец?

Ответ: .

Решение: Как мы помним, всего в многоугольнике  диагоналей, обозначим это число за . Всего способов выбрать две различные диагонали из  – это .

Подсчитаем теперь число способов выбрать две различные диагонали с общим концом. Нужно выбрать вершину, которая будет общим концом этих диагоналей, для этого есть  способов. А потом нужно выбрать ещё две вершины (для вторых концов двух диагоналей) из  (все вершины, исключая выбранную и связанные с ней сторонами), для этого есть  способов. Таким образом, для двух диагоналей с общим концом имеем  способов.

Следовательно, искомая вероятность равна . Осталось упростить это выражение.

.

**2.** На соревновании по плаванию выступают пловцы из разных стран: 6 из Норвегии, 7 из Японии и 11 из России. Порядок выступления определяется жеребьёв­кой. Какова вероятность того, что первые трое по жребию окажутся из России?

Ответ: .

Решение: Всего спортсменов 24. Посчитаем количество всех возможных наборов из трёх спортсменов для первых трёх выступлений, их будет . Из них  – это количество наборов из трёх спортсменов из России для первых трёх выступлений.

**3.** В аэропорту прилетевшие пассажиры ждут свои чемоданы у ленты транспортёра. Всего в самолёте чемоданов было 200. Грузчики бросают чемоданы на ленту в случайном порядке. Среди пассажиров – группа преподавателей теории вероятностей, и всего у них семь чемоданов. Какова вероятность того, что:

а) все семь их чемоданов окажутся среди первой сотни чемоданов;

б) среди первой сотни окажутся только четыре их чемодана из семи?

Ответ: а) Примерно 0,07; б) примерно 0,278.

Решение: а) Всего наборов для первой сотни чемоданов – . Подсчитаем, сколько всего возможных наборов для первой сотни чемоданов, в которые входят семь чемоданов преподавателей. Их будет , потому что нужно выбрать 93 чемодана из оставшихся 193 на оставшиеся вакантными 93 места. Таким образом, искомая вероятность равна . Осталось упростить это выражение.

.

б) Так же, как и ранее, всего наборов для первой сотни чемоданов – . Подсчитаем, сколько всего наборов для первой сотни чемоданов, в которые входят только четыре из семи чемоданов преподавателей. Их будет , так как нужно выбрать 4 чемодана из 7 преподавательских и 96 чемоданов из 193 оставшихся. Таким образом, искомая вероятность равна . Осталось упростить это выражение.

.

**4**. В коробке с новогодними шарами есть 10 белых шаров, 12 синих и 8 красных. Света выбирает случайным образом 6 шаров из ящика. Какова вероятность того, что у неё окажется по 2 шара каждого цвета?

Ответ: .

Решение: Всего Свете нужно выбрать 6 шаров из 30. Это можно сделать  способами. Выбрать по 2 шара каждого цвета можно  способами. Тогда искомая вероятность равна .

**5**. Игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что хотя бы два раза выпадет одно и то же число очков?

Ответ: .

Решение: Всего возможных комбинаций, которые могут выпасть, . Подсчитаем для удобства те из них, где все результаты бросков разные. Их будет , поскольку это число перестановок 6 возможных результатов бросков. Значит, вероятность того, что все результаты бросков различны, равна . Отсюда вероятность того, что хотя бы два результат бросков совпадут, равна .

**6**. В отделении банка клиенту выдают новую банковскую карту, последние 4 цифры её номера выбираются случайным образом. Какова вероятность того, что произведение последних 4 цифр номера банковской карты равно 0?

Ответ: 0,3439.

Решение: Всего возможных комбинаций для последних четырёх цифр – . Произведение последних цифр равно нулю тогда, когда хотя бы одна из этих цифр равна нулю. Подсчитаем для удобства количество комбинаций, в которых среди последних 4 цифр нет нуля. Их будет . тогда искомая вероятность равна .

**7.** Монету бросают 12 раз. Какова вероятность того, что ни разу не случится две решки подряд?

Ответ: .

Решение: Результат такого случайного эксперимента – это последовательность из орлов или решек длины 12.

Решим задачу в общем виде. Рассмотрим какую-нибудь последовательность длины  из О и Р, в которой нет РР. Подумаем, чем она может заканчиваться. Такая последовательность не может заканчиваться на РР, то есть либо она заканчивается на О, либо на ОР (подумайте над этим ещё раз, это ключевой момент в решении). Если последовательность заканчивается на О, то всё, кроме него – это последовательность, построенная по тому же правилу, но длины . Если же она заканчивается на ОР, то всё, кроме них – это последовательность, построенная по тому же правилу, но длины . Получается, что таких последовательностей длины  столько же, сколько последовательностей длины  и последовательностей длины .

Вычислим первые значения (см. таблицу).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Длина последовательности | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |  |  |
| Количество последовательностей | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |  |  |  |

Последовательностей длины 1 всего две: О и Р. Последовательностей длины 2 уже три: ОО, ОР и РО. Далее можно воспользоваться выражением числа фигур через два предыдущих значения.

Снова получаются числа Фибоначчи, но со сдвигом на 2.

Надежда Сошитова, Иван Высоцкий