# 16 декабря. Занятие 10

## Повторение. Комбинаторика 1. Перестановки, правило умножения. Факториал.

**1.** Сколько пятизначных чисел, в которых все цифры чётные и различны?

Ответ: 96.

Решение: Первую цифру мы можем выбрать 4 способами (2, 4, 6 или 8, 0 недопустим), вторую – снова 4 способами (из 5 цифр – 2, 4, 6, 8 и 0 одну мы уже выбрали), третью – 3 способами, четвёртую – 2 способами и пятую – 1 способом (какая осталась). Итого получаем  способов.

**2.** Сколько есть четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в записи которых нет одинаковых цифр?

Ответ: 1120.

Решение: Согласно признаку делимости на 4, число делится на 4 тогда и только тогда, когда на 4 делится число, составленное из двух последних цифр исходного числа (например, 28, 60 или 44). Поэтому нужно подсчитать число возможных "двузначных" чисел (поскольку здесь числа, начинающиеся с нуля, разрешены), которые делятся на 4. Их всего 25: от 00 до 96. Из них три: 00, 44 и 88 нам не подходят сразу, так как нас интересуют числа, цифры в которых не повторяются.

Из оставшихся 22 вариантов необходимо подсчитать количество чисел, в которые входит 0, и в которые не входит (зачем?). Чисел с 0 всего 6: 04, 08, 20, 40, 60, 80. Чисел без 0 всего 16: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96.

Пусть для последних двух цифр мы выбрали одну из 6 комбинаций, в которую входит цифра 0. Это означает, что для первой цифры исходного четырёхзначного числа у нас осталось 8 вариантов выбора (кроме двух из комбинации), а для второй – 7 вариантов выбора. Таких чисел получится .

Теперь пусть для последних двух цифр мы выбрали одну из 16 комбинаций, в которую не входит цифра 0. Тогда для первой цифры исходного числа у нас остаётся 7 вариантов выбора (кроме двух из комбинации и 0), а для второй – снова 7 вариантов (кроме трёх уже выбранных). Таких чисел получится .

Значит, всего вариантов .

**3.** В 6 классе 15 девочек и 13 мальчиков. Сколькими способами можно выделить группу из трёх человек для дежурства в столовой из этого класса, если:

а) нужно выбрать 1 девочку и двух мальчиков;

б) нужно выбрать 2 девочек и 1 мальчика?

Ответ: а) 1170; б) 1365.

Решение: а) Одну девочку можно выбрать 15 способами, а двух мальчиков –  способами. Действительно, первого мальчика можно выбрать 13 способами, а второго – 12 способами, но каждые два выбора типа "Денис – Коля" и "Коля – Денис" дают одну и ту же пару дежурных, поэтому число способов нужно делить на два. Отсюда общее число способов равно .

б) Задача решается аналогично пункту б) с заменой мальчиков на девочек и наоборот.

**4**. Сколько диагоналей у правильного -угольника?

Ответ: .

Решение: Первую вершину, через которую будет проходить диагональ, можно выбрать  способами. В качестве второй вершины нельзя брать взятую вершину и две соседние с ней, так как в этом случае получится не диагональ, а сторона. Поэтому остаётся  варианта выбора второй вершины. Теперь заметим, что выбрав вначале вершину , а потом вершину , или выбрав вначале вершину , а потом вершину , мы в обоих случаях получаем одну и ту же диагональ . Поэтому число диагоналей в два раза меньше, чем число способов выбрать пару вершин с учётом порядка. Отсюда получаем результат.

## Комбинаторика 2. Сочетания, число сочетаний. Выбор из конечного набора.

**1.** Сколькими способами можно выбрать из набора из 12 карандашей:

а) 2 карандаша; б) 3 карандаша?

Ответ: а) ; б) .

Решение: Решим задачу в общем виде. Пусть у нас есть  различных карандашей, и нам нужно выбрать  из них, .

Случай  можно рассмотреть отдельно: ясно, что есть всего 1 способ выбрать 0 карандашей – это не взять ничего. Поэтому по определению .

Пусть теперь . Будем брать карандаши по очереди. Первый карандаш мы можем выбрать  способами, второй –  способом, третий –  способами и так далее. -ый карандаш мы можем выбрать  способом. Получаем  способов выбрать  карандашей из  с учётом порядка. Теперь вспомним, что мы выбираем сразу группу из  карандашей без учёта их порядка. Это означает, что все  перестановок каждой последовательности карандашей дают один и тот же набор карандашей. Поэтому число способов выбрать набор карандашей в  раз меньше, то есть это .

**2.** а) Паша выписал все наборы из четырёх букв, взятых из слова ПРИВЕТ (набор букв не учитывает порядок). Проверьте, не забыл ли он что-либо?

ПРИВ, ПРИЕ, ПРИТ, ПРВЕ, ПРВТ, ПРЕТ, ПИВЕ, ПИВТ, ПВЕТ, РИВЕ, РИВТ, РВЕТ, ИВЕТ.

б) Сколько должно быть всего комбинаций из 4 букв 6-буквенного слова?

Ответ: а) ПИЕТ, РИЕТ; б) .

Решение: а) Здесь достаточно проверить, каких наборов не хватает.

б) Аналогично задаче 1.

**3.** Сколько у Муми-тролля способов выбрать из 100 любимых ракушек половину, чтобы подарить фрёкен Снорк?

Ответ: .

Решение: Аналогично задаче 1.

**4**. Сколько всего различных четырёхзначных чисел, цифры которых стоят в порядке убывания (каждая следующая строго меньше предыдущей)?

Ответ: 210.

Решение: Запишем все цифры в порядке убывания: 9876543210. Итого 10 цифр, из них нам нужно вычеркнуть 6. Останется четырёхзначное число, у которого цифры стоят в порядке убывания. Таким образом, всего таких чисел .

**5**. а) Сколько способов разбить число 12 на четыре натуральных слагаемых с учётом порядка (например,  и  – разные разбиения)?

б) Сколько способов разбить число 12 на натуральные слагаемые с учётом порядка (например,  и  – разные разбиения)?

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) Представим число 12 в виде двенадцати кружочков, расположенных в ряд. Для разбиения на слагаемые нам необходимо поместить между этими кружочками перегородки. Каждой комбинации перегородок соответствует разбиение на слагаемые, и наоборот.

Для разбиения на 4 слагаемых необходимо поставить всего 3 перегородки, а мест для них всего 11 – это число промежутков между 12 кружочками. Отсюда получаем результат.

б) Для каждого из 11 промежутков есть два варианта: в нём либо стоит перегородка, либо не стоит. Поэтому число способов равно произведению одиннадцати двоек.

**6**. Андрей купил 20 новогодних открыток.

а) Сколько у него способов выбрать 5 из них для того, чтобы послать их 5 свои тётушкам?

б) Сколько у него способов отправить 5 открыток из 20 купленных 5 своим тётушкам?

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) Здесь Андрею нужно выбрать из 20 открыток 5 без учёта порядка. Это и есть число сочетаний из 20 по 5.

б) Здесь Андрею нужно выбрать 5 открыток с учётом порядка. Первую открытку (для первой тётушки) он может выбрать 20 способами, вторую (для второй тётушки) – 19 способами, и так далее. Пятую открытку он может выбрать 16 способами. Отсюда получается ответ.

**7.** В классе 24 человека. Для участия в командной олимпиаде их нужно разбить поровну на: а) 3; б) 4 команды. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) Вначале выберем состав первой команды. Их должно быть 8 человек, и это можно сделать  способами. Теперь из оставшихся 16 человек выберем состав второй команды. Это можно сделать  способами. Осталось 8 человек, они и составят третью команду.

б) Рассуждаем аналогично пункту а), только теперь в командах не 8, а 6 человек.

**8**. Сколько всего способов поставить на шахматную доску а) 8; б)\*  () одинаковых ладей, чтобы они не били друг друга?

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) Если мы поставим на шахматную доску 8 ладей так, чтобы они не били друг друга, то каждая ладья будет стоять на своей горизонтали. Пронумеруем ладьи в соответствии с номерами их горизонталей. Для первой ладьи у нас есть 8 вариантов размещения. Для второй – 7 (так как одна из вертикалей уже занята – на ней стоит первая ладья). Для третьей – 6, и так далее. Для 7 – 2 варианта, и для 8 – всего 1 (то, что осталось). Таким образом, получаем  вариантов.

б) Выберем из исходных 8 горизонталей и 8 вертикалей те  горизонталей и  вертикалей, на которых будут стоять ладьи. Это можно сделать  способами для горизонталей и  способами для вертикалей.

Теперь представим себе, что из исходной доски  мы получаем доску , вырезав те горизонтали и вертикали, которые мы не выбрали. Можно считать, что мы расставляем  ладей на доске  так, чтобы они не били друг друга. Это можно сделать  способами аналогично пункту а).

Отсюда итоговое число способов равно .

**9.** В коробке 8 фломастеров и 12 карандашей. Сколько всего способов выбрать 2 карандаша и 4 фломастера?

Ответ: .

Решение: Выбрать 2 карандаша можно  способами, а 4 фломастера –  способами. Общее число способов получаем по правилу умножения.

**10.** В коробке  разноцветных фломастеров и  разноцветных карандашей. Сколько способов выбрать из них  фломастеров и  карандашей ( и )?

Ответ: .

Решение: Эта задача является общим случаем задачи 9.

**11.** Докажите формулу[[1]](#footnote-1): .

Решение: Представим, что у нас есть коробка, в которой лежит  разноцветных фломастеров и  разноцветных карандашей (т.е. всего  предметов). Нам необходимо выбрать из неё  предметов.

С одной стороны, число способов сделать такой выбор равно .

С другой стороны, эти  предметов можно по-разному разделить на фломастеры и карандаши: можно взять 0 фломастеров и  карандашей (это можно сделать  способами), можно взять 1 фломастер и  карандаш (это можно сделать  способами), можно взять 2 фломастера и  карандаша (это можно сделать  способами), ну и так далее. Последний вариант – взять  фломастеров и 0 карандашей, и это можно сделать  способами. Отсюда получаем искомое соотношение.

**12.** Сколько всего можно составить сладких новогодних подарков из 20 конфет 8 видов? Ответ оставьте в виде формулы.

Ответ: .

Решение: Обозначим  число конфет -го вида, . Известно, что  и  для всех . Таким образом, задача сводится к разложению числа 20 на 8 неотрицательных слагаемых (с учётом порядка). Если к каждому слагаемому прибавить 1, то задача сведётся к вычислению числа разложений числа 28 на натуральные слагаемые (с учётом порядка). Представим число 28 как 28 кружков, которые нужно разделить на 8 непустых групп, то есть поставить между ними 7 перегородок. Для них есть 27 вариантов. Отсюда получаем ответ.

Надежда Сошитова

1. Эта формула называется Свёркой Вандермонда. [↑](#footnote-ref-1)