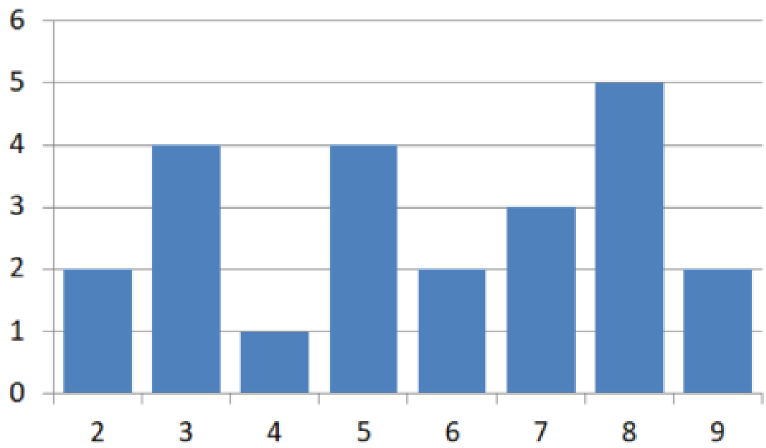
Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
27 января 2024 г.

8 класс. Ответы и решения

Задача 1. (1 балл) В кафе 23 пластиковых лотка с пирожными. На диаграмме показано, как распределены пирожные. На горизонтальной прямой показано количество пирожных, а на вертикальной – сколько лотков содержит именно такое число пирожных. Найдите медиану величины «*число пирожных в лотке*».



Ответ: 6.

Решение. Всего в массиве данных 23 числа. Упорядочим их по возрастанию: два числа 2, четыре числа 3 и так далее. На 12-м месте стоит число 6. Оно и является медианой.

Задача 2 (1 балл). В коробке много конфет тёмного шоколада и ещё больше конфет белого шоколада. Четыре случайные конфеты случайным образом поделили между Валей и Колей поровну. Известно, что вероятность того, что у обоих окажутся по одной тёмной и одной белой конфете, равна α, а вероятность того, что хотя бы у одного из них окажутся тёмная и белая конфеты, равна β. Найдите вероятность того, что у Вали окажутся две конфеты одного цвета.

Ответ: $1-\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Решение. Обозначим B и K события «у Вали разные конфеты» и «у Коли разные конфеты». Вероятности этих событий одинаковы в силу симметрии: $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(K)$.

Из равенства

$$\mathrm{P}(B\cup K)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(K)-\mathrm{P}(B\cap K)$$

получаем:

$$\beta=2\mathrm{P}(B)-\alpha\ ;\quad \mathrm{P}(B)=\frac{\alpha+\beta}{2}\ ;\quad \mathrm{P}(\bar{B})=1-\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Задача 3 (2 балла). У папы есть коробка, в которой лежат одинаковые по размеру шары разных цветов: красные, жёлтые и синие. Вова собирается вынуть из коробки случайный шар. Он спрашивает папу: «Какого цвета шар мне вероятнее всего попадётся?» Папа отвечает: «Синего». Вова переспрашивает: «Значит, вероятнее всего, что мне попадётся синий шар?» «Нет, вероятнее всего, что синий шар тебе не попадётся», – отвечает папа. Какое наименьшее количество шаров может быть в коробке, если папа всегда говорит правду?

Автор задачи Геннадий Гусев, 6 класс

Ответ: 7.

Решение. Если шаров какого-то цвета нет (во время олимпиады были вопросы, может ли так быть), то указанная в условии ситуация невозможна. В коробке есть хотя бы по одному шару каждого цвета. Значит, синих шаров, по крайней мере, два.

Если синих шаров два, то желтых и красных должно быть по одному. Но в этом случае нарушается второе условие: вероятность вынуть синий шар оказывается не меньше, а равна вероятности вынуть не синий шар.

Если синих шаров три, то красных и желтых вместе должно быть хотя бы 4. Следовательно, наименьшее количество шаров не меньше чем 7.

Пример: три синих шара, два желтых и два красных удовлетворяют условию.

Задача 4 (2 балла). Кот Базилио предложил Буратино и Пьеро сыграть с ним в новую лотерею. Вначале Буратино и Пьеро вносят по 19 сольдо, а кот вносит 82 сольдо. Затем Буратино и Пьеро бросают по игральному кубику. Если число очков, выпавшее у Буратино, делится на число очков, выпавшее у Пьеро, то Буратино забирает свой выигрыш – в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то Буратино не получает ничего. Если число очков, выпавшее у Пьеро, делится на число очков, выпавшее у Буратино, то Пьеро забирает в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то не получает ничего. Деньги, оставшиеся после выплаты выигрышей Буратино и Пьеро, кот забирает себе. Кот утверждает, что для каждого из троих игроков вероятность получить больше, чем игрок внёс вначале, одинакова. Правда ли это?

Ответ: да.

Решение. Суммарный взнос равен 120 сольдо. Пусть Буратино выбросил n очков, а пьеро – k очков. Составим таблицу**,** в которой клетки соответствуют всем 36 возможным исходам бросков, а в клетках запишем выигрыши Буратино, Пьеро и Кота, разделив их наклонными чертами.

k \ n	1	2	3	4	5	6
1	20/20/80	40/0/80	60/0/60	80/0/40	100/0/20	120/0/0
2	0/40/80	20/20/80	0/0/120	40/0/80	0/0/120	60/0/60
3	0/60/60	0/0/120	20/20/80	0/0/120	0/0/120	40/0/80
4	0/80/40	0/40/80	0/0/120	20/20/80	0/0/120	0/0/120
5	0/100/20	0/0/120	0/0/120	0/0/120	20/20/80	0/0/120
6	0/120/0	0/60/60	0/40/80	0/0/120	0/0/120	20/20/80

Оранжевым цветом отмечены исходы, в которых Буратино получил больше 19 сольдо, а зеленым – в которых кот получил больше, чем 82 сольдо. И тех, и других по 14. Следовательно, вероятности выигрыша Буратино и вероятность выигрыша кота одинаковы – по $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$. Вероятность выигрыша Пьеро такая же, поскольку Буратино и Пьеро в равных условиях.

Задача 5 (2 балла). В случайном опыте ровно 7 элементарных событий, и все они равновозможны. Пусть M – множество всех событий этого опыта, кроме невозможного (пустого) события. Сколько в множестве M существует пар различных независимых событий?

Ответ: 126.

Решение. Предположим, что события $A, B \in M$ независимы, что событию A благоприятствует a, событию B – b, а событию $A \cap B$ – c элементарных событий. Тогда выполняется равенство

$$\frac{a}{7}\cdot\frac{b}{7}=\frac{c}{7},$$

откуда $ab=7c$. Поскольку в множестве M нет пустого события, $1 \le a,b \le 7$. Число 7 простое, потому a или b равно 7. Пусть, для определенности, $a=7$, то есть событие A достоверное. Всего в множестве M ровно $2^7-1=127$ событий, включая A, поэтому в качестве B можно взять любое из 126 событий.

Задача 6 (3 балла). Валя слепила себе из пластилина несимметричный игральный кубик. Коля вырезал себе из дерева ещё более несимметричный кубик. Грани на кубиках пронумерованы. Валя и Коля бросали свои кубики и записывали частоты выпавших граней. Обнаружилось, что:

- Валя бросила кубик 100 раз, и у неё единица выпала 14 раз;
- Коля бросил кубик 20 раз, и единица выпала у него 7 раз;
- при всех n от 2 до 6 отношение частоты выпадения грани n к частоте выпадения грани $n-1$ у Вали в точности в $\frac{n}{n-1}$ раз больше, чем это же отношение у Коли.

Найдите среднее арифметическое числа очков, выпавших у Коли.

Ответ: 2,5.

Решение. Пусть частоты выпадения граней у Вали равны $v_1,\ldots,v_6$, а у Коли частоты граней равны $k_1,\ldots,k_6$.

Тогда

$$\frac{v_2}{v_1}=2\frac{k_2}{k_1}, \text{ откуда } v_2k_1=2v_1k_2,$$

$$\frac{v_3}{v_1}=\frac{v_3}{v_2}\frac{v_2}{v_1}=\frac{3}{2}\frac{k_3}{k_2}\cdot 2\frac{k_2}{k_1}=3\frac{k_3}{k_1}, \text{ откуда } v_3k_1=3v_1k_3.$$

Таким образом получим все равенства $v_n k_1 = n v_1 k_n$ при $n = 2, ..., 6$ и сложим их почленно:

$$v_1\left(2k_2+3k_3+...+6k_6\right)=k_1\left(v_2+v_3+...+v_6\right).$$

Добавим к обеим частям $v_1 k_1$:

$$v_1\left(k_1+2k_2+3k_3+...+6k_6\right)=k_1\left(v_1+v_2+v_3+...+v_6\right).$$

Среднее число очков, выпавших на кубике у Коли, равно

$$k_1+2k_2+3k_3+...+6k_6=\frac{k_1}{v_1}\left(v_1+v_2+v_3+...+v_6\right)=\frac{k_1}{v_1}=\frac{7}{20}:\frac{14}{100}=2,5.$$

Примечание. Указанная в условии ситуация возможна. Пример в таблице.

Число очков	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Валя	14	16	24	24	10	12
Коля	7	4	4	3	1	1

Авторы задач: *Геннадий Глебов (6-й класс), Н.И.Сошитова, П.В.Семенов, А.В.Шкляев, И.Р.Высоцкий.*