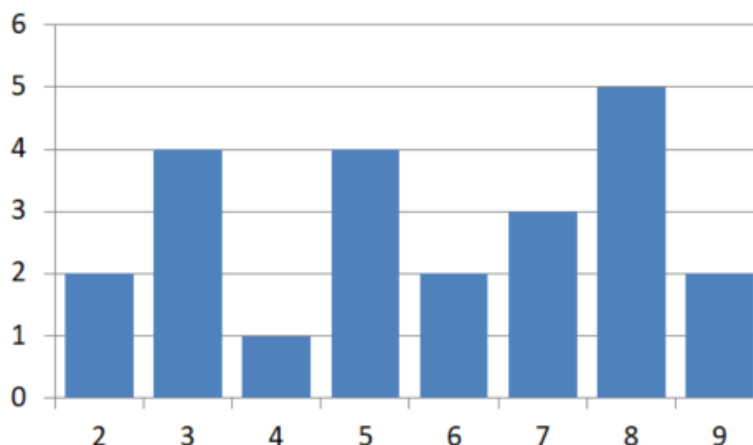


8 класс. Ответы и решения

**Задача 1. (1 балл)** В кафе 23 пластиковых лотка с пирожными. На диаграмме показано, как распределены пирожные. На горизонтальной прямой показано количество пирожных, а на вертикальной – сколько лотков содержит именно такое число пирожных. Найдите медиану величины «число пирожных в лотке».



**Ответ: 6.**

**Решение.** Всего в массиве данных 23 числа. Упорядочим их по возрастанию: два числа 2, четыре числа 3 и так далее. На 12-м месте стоит число 6. Оно и является медианой.

**Задача 2 (1 балл).** В коробке много конфет тёмного шоколада и ещё больше конфет белого шоколада. Четыре случайные конфеты случайным образом поделили между Валеи и Колей поровну. Известно, что вероятность того, что у обоих окажутся по одной тёмной и одной белой конфете, равна  $\alpha$ , а вероятность того, что хотя бы у одного из них окажутся тёмная и белая конфеты, равна  $\beta$ . Найдите вероятность того, что у Вали окажутся две конфеты одного цвета.

**Ответ:**  $1 - \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

**Решение.** Обозначим  $B$  и  $K$  события «у Вали разные конфеты» и «у Коли разные конфеты». Вероятности этих событий одинаковы в силу симметрии:  $P(B) = P(K)$ .

Из равенства

$$P(B \cup K) = P(B) + P(K) - P(B \cap K)$$

получаем:

$$\beta = 2P(B) - \alpha; \quad P(B) = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad P(\bar{B}) = 1 - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

**Задача 3 (2 балла).** У папы есть коробка, в которой лежат одинаковые по размеру шары разных цветов: красные, жёлтые и синие. Вова собирается вынуть из коробки случайный шар. Он спрашивает папу: «Какого цвета шар мне вероятнее всего попадётся?» Папа отвечает: «Синего». Вова переспрашивает: «Значит, вероятнее всего, что мне попадётся синий шар?» «Нет, вероятнее всего, что синий шар тебе не попадётся», – отвечает папа. Какое наименьшее количество шаров может быть в коробке, если папа всегда говорит правду?

*Авт. Геннадий Гусев, 6 класс*

**Ответ:** 7.

**Решение.** Если шаров какого-то цвета нет (во время олимпиады были вопросы, может ли так быть), то указанная в условии ситуация невозможна. В коробке есть хотя бы по одному шару каждого цвета. Значит, синих шаров, по крайней мере, два.

Если синих шаров два, то желтых и красных должно быть по одному. Но в этом случае нарушается второе условие: вероятность вынуть синий шар оказывается не меньше, а равна вероятности вынуть не синий шар.

Если синих шаров три, то красных и желтых вместе должно быть хотя бы 4. Следовательно, наименьшее количество шаров не меньше чем 7.

Пример: три синих шара, два желтых и два красных удовлетворяют условию.

**Задача 4 (2 балла).** Кот Базилио предложил Буратино и Пьеро сыграть с ним в новую лотерею. Вначале Буратино и Пьеро вносят по 19 сольдо, а кот вносит 82 сольдо. Затем Буратино и Пьеро бросают по игральному кубику. Если число очков, выпавшее у Буратино, делится на число очков, выпавшее у Пьеро, то Буратино забирает свой выигрыш – в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то Буратино не получает ничего. Если число очков, выпавшее у Пьеро, делится на число очков, выпавшее у Буратино, то Пьеро забирает в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то не получает ничего. Деньги, оставшиеся после выплаты выигрышей Буратино и Пьеро, кот забирает себе. Кот утверждает, что для каждого из троих игроков вероятность получить больше, чем игрок внёс вначале, одинакова. Правда ли это?

**Ответ:** да.

**Решение.** Суммарный взнос равен 120 сольдо. Пусть Буратино выбросил  $n$  очков, а Пьеро –  $k$  очков. Составим таблицу, в которой клетки соответствуют всем 36 возможным исходам бросков, а в клетках запишем выигрыши Буратино, Пьеро и Кота, разделив их наклонными чертами.

$k \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1	20/20/80	40/0/80	60/0/60	80/0/40	100/0/20	120/0/0
2	0/40/80	20/20/80	0/0/120	40/0/80	0/0/120	60/0/60
3	0/60/60	0/0/120	20/20/80	0/0/120	0/0/120	40/0/80
4	0/80/40	0/40/80	0/0/120	20/20/80	0/0/120	0/0/120
5	0/100/20	0/0/120	0/0/120	0/0/120	20/20/80	0/0/120
6	0/120/0	0/60/60	0/40/80	0/0/120	0/0/120	20/20/80

Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике  
27 января 2024 г.

Оранжевым цветом отмечены исходы, в которых Буратино получил больше 19 сольдо, а зеленым – в которых кот получил больше, чем 82 сольдо. И тех, и других по 14. Следовательно, вероятности выигрыша Буратино и вероятность выигрыша кота одинаковы – по  $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ . Вероятность выигрыша Пьеро такая же, поскольку Буратино и Пьеро в равных условиях.

**Задача 5 (2 балла).** В случайном опыте ровно 7 элементарных событий, и все они равно-возможны. Пусть  $M$  – множество всех событий этого опыта, кроме невозможного (пустого) события. Сколько в множестве  $M$  существует пар различных независимых событий?

**Ответ:** 126.

**Решение.** Предположим, что события  $A, B \in M$  независимы, что событию  $A$  благоприятствует  $a$ , событию  $B$  –  $b$ , а событию  $A \cap B$  –  $c$  элементарных событий. Тогда выполняется равенство

$$\frac{a}{7} \cdot \frac{b}{7} = \frac{c}{7},$$

откуда  $ab = 7c$ . Поскольку в множестве  $M$  нет пустого события,  $1 \leq a, b \leq 7$ . Число 7 простое, потому  $a$  или  $b$  равно 7. Пусть, для определенности,  $a = 7$ , то есть событие  $A$  достоверное. Всего в множестве  $M$  ровно  $2^7 - 1 = 127$  событий, включая  $A$ , поэтому в качестве  $B$  можно взять любое из 126 событий.

**Задача 6 (3 балла).** Валя слепила себе из пластилина несимметричный игральный кубик. Коля вырезал себе из дерева ещё более несимметричный кубик. Грани на кубиках пронумерованы. Валя и Коля бросали свои кубики и записывали частоты выпавших граней. Обнаружилось, что:

- Валя бросила кубик 100 раз, и у неё единица выпала 14 раз;
- Коля бросил кубик 20 раз, и единица выпала у него 7 раз;
- при всех  $n$  от 2 до 6 отношение частоты выпадения грани  $n$  к частоте выпадения

грани  $n-1$  у Вали в точности в  $\frac{n}{n-1}$  раз больше, чем это же отношение у Коли.

Найдите среднее арифметическое числа очков, выпавших у Коли.

**Ответ:** 2,5.

**Решение.** Пусть частоты выпадения граней у Вали равны  $v_1, \dots, v_6$ , а у Коли частоты граней равны  $k_1, \dots, k_6$ .

Тогда

$$\frac{v_2}{v_1} = 2 \frac{k_2}{k_1}, \text{ откуда } v_2 k_1 = 2 v_1 k_2,$$
$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2} \frac{k_3}{k_2} \cdot 2 \frac{k_2}{k_1} = 3 \frac{k_3}{k_1}, \text{ откуда } v_3 k_1 = 3 v_1 k_3.$$

Таким образом получим все равенства  $v_n k_1 = n v_1 k_n$  при  $n = 2, \dots, 6$  и сложим их почленно:

$$v_1(2k_2 + 3k_3 + \dots + 6k_6) = k_1(v_2 + v_3 + \dots + v_6).$$

Добавим к обеим частям  $v_1 k_1$ :

$$v_1(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + 6k_6) = k_1(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_6).$$

Среднее число очков, выпавших на кубике у Коли, равно

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + 6k_6 = \frac{k_1}{v_1}(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_6) = \frac{k_1}{v_1} = \frac{7}{20} : \frac{14}{100} = 2,5.$$

**Примечание.** Указанная в условии ситуация возможна. Пример в таблице.

Число очков	1	2	3	4	5	6
Валя	14	16	24	24	10	12
Коля	7	4	4	3	1	1

*Авторы задач: Геннадий Гусев (6-й класс), Н.И.Соштова, П.В.Семенов, А.В.Шкляев, И.Р.Высоцкий.*