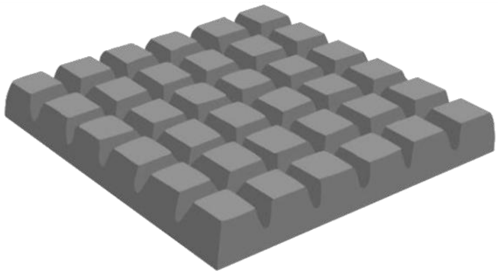
Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
27 января 2024 г.

10 – 11 классы. Ответы и решения

Задача 1. (2 балла). Была у братьев шоколадка, разделённая на 36 квадратиков прямолинейными бороздками (см. рисунок). Старший брат сломал шоколадку по случайной прямой и поступил по-братски: съел тот кусок, который оказался не больше другого. Потом пришёл младший брат, сломал оставшуюся часть тоже по случайной прямой и съел кусок, который оказался не меньше другого. Определите, кто из братьев съел в среднем больше – сравните математические ожидания количества квадратиков, доставшихся братьям.



Ответ: младший.

Решение. Составим распределение случайной величины Y «*число квадратиков в меньшей из двух частей после первого разлома*».

$$Y \sim \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{E}Y = 10{,}8$.

Младший забирает X квадратиков, и это не меньше половины оставшейся части, то есть не меньше чем $18 - \frac{Y}{2}$. Значит,

$$\mathrm{E}X \geq 18 - \frac{1}{2}\mathrm{E}Y = 12{,}6 > 10{,}8.$$

Задача 2. Группа, в которой 27 студентов, сдает письменный зачёт по решению олимпиадных задач. Преподаватель заготовил зачётную работу в 3 вариантах и распределяет варианты случайным образом с единственным условием: количество тех, кто получил разные варианты, должно отличаться не больше чем на единицу. Перед зачётом между студентами Сергеем и Алексеем состоялся следующий диалог.

С: Вероятность того, что у нас с тобой окажется один и тот же вариант, равна 1/3.

А: Если сегодня кто-то один не придёт на зачёт, то она окажется меньше, чем была бы, если бы пришли все.

С: Если сегодня не придут двое, то она окажется меньше, чем была бы, если бы не пришёл кто-то один.

а) (1 балл) Верно ли первое утверждение Сергея?

б) (1 балл) Верно ли утверждение Алексея?

в) (1 балл) Верно ли второе утверждение Сергея?

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Решение. а) Пусть Сергей получил какой-то вариант. Тогда для Алексея вариантов с этим же номером остается меньше, чем треть общего числа оставшихся вариантов. Поэтому вероятность совпадения меньше, чем 1/3.

б) Если на зачёт придут все, то вероятность совпадения равна $\frac{8}{26}=\frac{4}{13}$. Если не придёт кто-то один, то варианты распределятся так: 9 студентов получили один вариант, еще 9 – другой вариант, и еще 8 – третий. В этом случае вероятность совпадения вариантов равна

$$\frac{9}{26}\cdot\frac{8}{25}+\frac{9}{26}\cdot\frac{8}{25}+\frac{8}{26}\cdot\frac{7}{25}=\frac{8\cdot 25}{26\cdot 25}=\frac{4}{13}.$$

Решение без вычислений. Можно считать, что отсутствующий студент все же пришел, взял последний оставшийся вариант и ушел с ним — для Сергея и Алексея ничего не изменилось.

в) Если не придут двое, то варианты распределены так: 9, 8 и 8. Вероятность совпадения равна

$$\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}=\frac{8\cdot 23}{25\cdot 24}=\frac{23}{75}<\frac{4}{13}.$$

Решение почти без вычислений: если бы все тянули варианты наугад, и два листка в остались бы в конце, то вероятность события «*С. и А. получат один и тот же вариант*» была бы $\frac{4}{13}$. Случай, когда остались два одинаковых варианта, более благоприятен для того, чтобы А. и С. получили одинаковые варианты, потому что $2\cdot 9\cdot 8+7\cdot 6>9\cdot 8+2\cdot 8\cdot 7$. Но этот случай невозможен по условию, значит, вероятность совпадения вариантов у С. и А. меньше $\frac{4}{13}$.

Задача 3 (2 балла). Есть два одинаковых карандашных грифеля длиной по 10 см. Каждый грифель ломается в одном случайном месте. Какова вероятность того, что найдутся два обломка, сумма длин которых не меньше 18 см?

Ответ: 0,08.

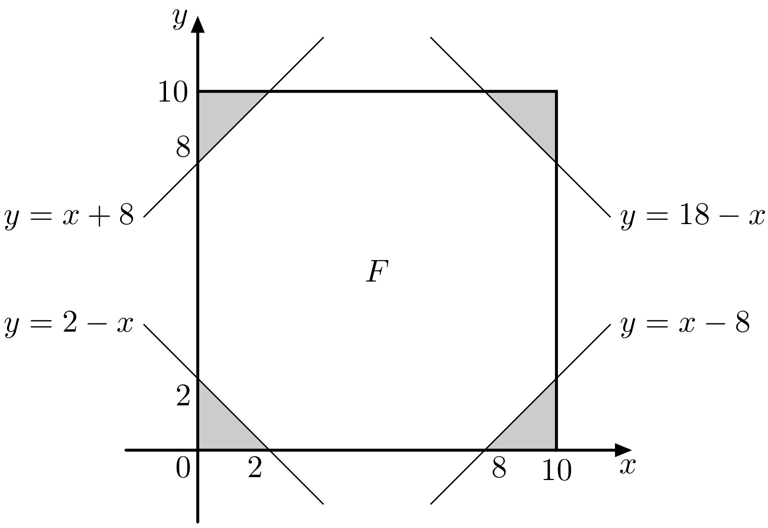


Рис. 1.

Решение. Мысленно введём на каждом грифеле координатную прямую, совместив начало координат с одним из концов грифеля. Пусть первый грифель сломан в случайной точке $x \in (0;10)$, а второй – в случайной точке $y \in (0;10)$. Теперь опыт сводится к выбору точки со случайными координатами $(x;1)$ в квадрате F с вершинами $(0;0)$, $(0;10)$, $(10;0)$ и $(10;10)$ (рис. 1). Событие G «*найдутся два обломка, сумма длин которых не меньше 18 см*» наступает в одном из четырёх несовместных случаев:

$$x+y\geq 18,\ x+10-y\geq 18,\ 10-x+y\geq 18 \text{ или } 10-x+10-y\geq 18.$$

Получается совокупность неравенств

$$y\geq 18-x,\ \ y\leq x-8,\ \ y\geq x+8 \ \text{ и } \ y\leq 2-x.$$

Внутри квадрата F эта совокупность определяет фигуру G, состоящую из четырёх закрашенных на рисунке треугольников, сумма площадей которых равна $4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=8$. Искомая вероятность равна

$$\mathrm{P}(G)=\frac{S_G}{S_F}=0{,}08.$$

Задача 4 (3 балла). Имеются два несимметричных игральных кубика. Известно, что:

- вероятность выпадения 1 очка на первом кубике равна 0,14;
- вероятность выпадения 1 очка на втором кубике равна 0,35;
- при всех *n* от 2 до 6 отношение вероятности выпадения *n* очков к вероятности выпадения $n-1$ очков на первом кубике в точности в $\frac{n}{n-1}$ раз больше, чем это же отношение для второго кубика.

Найдите математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании второго кубика.

Ответ: 2,5.

Решение. Пусть вероятности граней на первом и на втором кубиках равны $v_1,\ldots,v_6$ и $k_1,\ldots,k_6$ соответственно. Тогда

$$\frac{v_2}{v_1}=2\frac{k_2}{k_1}, \text{ откуда } v_2k_1=2v_1k_2,$$

$$\frac{v_3}{v_1}=\frac{v_3}{v_2}\frac{v_2}{v_1}=\frac{3}{2}\frac{k_3}{k_2}\cdot 2\frac{k_2}{k_1}=3\frac{k_3}{k_1}, \text{ откуда } v_3k_1=3v_1k_3.$$

Таким же образом получаем все равенства $v_nk_1=nv_1k_n$ при $n=2,\ldots,6$. Сложим полученные равенства почленно:

$$v_1\left(2k_2+3k_3+\ldots+6k_6\right)=k_1\left(v_2+v_3+\ldots+v_6\right).$$

Добавим к обеим частям v_1k_1:

$$v_1\left(k_1+2k_2+3k_3+\ldots+6k_6\right)=k_1\left(v_1+v_2+v_3+\ldots+v_6\right).$$

Математическое ожидание числа очков на втором кубике равно

$$k_1+2k_2+3k_3+\ldots+6k_6=\frac{k_1}{v_1}\left(v_1+v_2+v_3+\ldots+v_6\right)=\frac{k_1}{v_1}=2{,}5.$$

Задача 5 (3 балла). Беспроигрышная лотерея устроена по следующим правилам. Игрок покупает лотерейный билет за n рублей, причём цену он назначает сам (n – целое, большее 1). Затем генератор случайных чисел выбирает случайное натуральное число из отрезка от 1 до n включительно. Выигрыш игрока равен сумме делителей выбранного числа в рублях. Может ли игрок назначить цену лотерейного билета так, чтобы математическое ожидание выигрыша было больше его затрат?

Ответ: нет.

Решение. Сумму делителей выбранного случайного числа от 1 до n назовём X. Нужно понять, существуют ли n, при которых $\mathrm{E}X > n$.

Пусть I_k – индикатор события A_k «*выбранное число делится на* k», то есть $I_k = 1$, если событие A_k случилось, а в противном случае $I_k = 0$. Натуральных чисел, кратных k, на отрезке от 1 до n ровно $\left[\frac{n}{k}\right]$, где квадратные скобки означают целую часть. Значит,

$$\mathrm{E}I_k = \mathrm{P}\left(A_k\right) = \frac{[n/k]}{n} \le \frac{n}{kn} = \frac{1}{k}.$$

Выразим случайную величину X через индикаторы:

$$X = I_1 + 2I_2 + 3I_3 + \ldots + nI_n$$

и перейдём в этом равенстве к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + 2\mathrm{E}I_2 + 3\mathrm{E}I_3 + \ldots + n\mathrm{E}I_n \le 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{3} + \ldots + n\cdot\frac{1}{n} = n.$$

Значит, каким бы ни было натуральное n, выигрыш в среднем не больше цены билета. Равенство достигается при $n=1$ и $n=2$. При $n \ge 3$ среди неравенств $\mathrm{E}I_k \le \frac{1}{k}$ встречаются строгие, поэтому в этом случае $\mathrm{E}X < n$.

Задача 6 (4 балла). В круг встали 10 матросов, у каждого в руке поднятый флажок. Каждую секунду один случайный матрос, независимо от предыдущих событий, опускает свой флажок (если он был поднят) или поднимает (если флажок был опущен). Докажите, что событие «*через некоторое время все флажки снова будут подняты*» имеет вероятность 1.

Решение. Обозначим x_k вероятность того, что из состояния S_k, в котором k опущенных флажков и $10-k$ поднятых, матросы рано или поздно перейдут в состояние S_0 «10 *поднятых флажков*». Поскольку через секунду после начала процесс неизбежно оказывается в состоянии S_1, достаточно доказать, что $x_1 = 1$. Из состояния S_1 с вероятностью $\frac{1}{10}$ процесс возвращается в состояние S_0, а с вероятностью $\frac{9}{10}$ оказывается в состоянии S_2. Поэтому формула полной вероятности даёт $x_1 = \frac{1}{10}\cdot 1 + \frac{9}{10}x_2$.

Аналогично будем рассуждать относительно прочих состояний S_k, где $1 \le k \le 9$: с вероятностью $\frac{k}{10}$ процесс переходит в состояние S_{k-1}, и с вероятностью $1-\frac{k}{10}$ – в состояние S_{k+1}. Следовательно, $x_k = \frac{k}{10} x_{k-1} + \left(1 - \frac{k}{10}\right) x_{k+1}$ В частности, из состояния S_{10} с неизбежностью через секунду получится состояние S_9, и потому $x_{10} = x_9$. Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}1 + 0{,}9x_2, \\ x_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}8x_3, \\ \ldots, \\ x_9 = 0{,}9x_8 + 0{,}1x_{10}, \\ x_{10} = x_9. \end{cases}$$

Решим систему «снизу вверх»: из последних двух уравнений получается $x_9 = 0{,}9x_8 + 0{,}1x_9$, откуда $x_9 = x_8$. Подставляя x_8 вместо x_9 в третье снизу уравнение, находим, что $x_8 = x_7$. И так далее. Получается цепочка $x_{10} = x_9 = x_8 = \ldots = x_2 = x_1$. Тогда из первого уравнения получается $x_1 = 0{,}1 + 0{,}9x_1$, откуда $x_1 = 1$.

Авторы задач: *Катя Сошитова (4-й класс), Н.И.Сошитова, П.В.Семенов, А.В.Шкляев, И.Р.Высоцкий*