И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

ТЕМА: «ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ»

СЦЕНАРИИ УРОКОВ

Продолжение.
Начало см. № 4–5, 7 за 2023 г.

Урок: «Числовые наборы. Меры центральной тенденции (центральные меры, средние)»

Цель урока: сформировать у учащихся общее представление об описании числовых данных с помощью одной числовой характеристики — центральной меры (среднего). Учащиеся должны получить представление о том, что центральных мер много и способ описания данных в каждой задаче выбирается с учетом трех основных факторов: природы данных, цели исследования и сложившихся традиций.

Что такое описательная статистика? Когда данные собраны и представлены в удобном виде (например, с помощью таблицы), возникает вопрос: где и как группируются эти данные, велики или малы значения и каков разброс (рассеивание) данных. Чтобы понять это, данные нужно описать подходящим образом. Для этого нужны описательные показатели или параметры: средние значения, наибольшее, наименьшее и другие. Поэтому раздел статистики, занимающийся описанием данных, называется *описательной статистикой*.

Наборы числовых данных — генеральная совокупность, выборка, ряд. Числовые данные могут быть устроены сложно. Они могут иметь разную природу и требовать разных способов описания. Например, бывают генеральные совокупности данных, бывают выборки, часто встречаются ряды.

Задание 1. Что такое *генеральная совокупность*? Предположим, нам нужно собрать сведения о росте жителей Российской Федерации. Сразу возникают проблемы: у взрослых и у детей разный рост. Женщины и мужчины тоже отличаются по росту. Уточним задачу: мы хотим изучить рост только взрослых женщин. В этой задаче все взрослые жители России женского пола образуют генеральную совокупность. Таким образом, генеральная совокупность — это набор всех объектов, которые нужно исследовать.

Что такое *выборка*? Измерить рост всех женщин в России невозможно. Их миллионы. Собрать такую статистику чрезвычайно трудно и дорого. Но можно выбрать из совокупности часть — выборку. В нашем случае можно сделать выборку объемом 1000, то есть случайным образом выбрать 1000 женщин и измерить их рост. Это вполне посильная задача. Чтобы по выборке сделать достоверный или хотя бы правдоподобный вывод о всей совокупности, используются специальные выборочные методы. Например, если в нашей выборке средний рост женщин равен 165 см, можно считать, что средний рост всех женщин во всей генеральной совокупности близок к этому значению.

Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

– Кому и зачем важно иметь сведения о росте взрослых женщин?

– Можно ли поменять местами порядок чисел в выборке?

– Изменится ли от этого среднее арифметическое, наибольшее или наименьшее значение в выборке?

Задание 2. Что такое *ряд*? Предположим, что мы следим за некоторой изменчивой величиной. Например, за ценой на нефть. Цена нефти выражается в долларах за баррель[1]. Каждый день фиксируется средняя цена за 1 баррель нефти марки Brent . В таблице показаны цены за 10 дней. Если данные каким-то образом упорядочены (по времени, по величине и т.п.), они образуют ряд.

Дата	Средняя цена (долл.)	Изменения (%)
29.10.2018	76,92	–1,08
30.10.2018	76,32	–0,78
31.10.2018	76,23	–0,12
01.11.2018	72,75	–4,57
02.11.2018	72,61	–0,19
06.11.2018	72,1	–0,70
07.11.2018	72,05	–0,07
08.11.2018	70,69	–1,89
09.11.2018	69,88	–1,15
12.11.2018	70,94	1,52

Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

– Кому важно знать, как менялась цена на нефть во времени?

– Как можно использовать эту информацию?

– Можно ли в этой таблице поменять местами цены за разные дни?

Желательный результат обсуждения. В задании 1 мы имеем дело с выборкой. Важно знать не только среднее, но и сколько процентов женщин не выше 150 см, 155 см и т.д. В первую очередь эта информация важна для модельеров, производителей одежды и мебели. А вот порядок измерений здесь не важен. Ни среднее арифметическое, ни наибольшее и наименьшее значения не поменяются от перестановки измерений.

В задании 2 информация о ценах на нефть важна для нефтяников, экономистов и для правительства. Например, бюджет России в значительной степени формируется из доходов от продажи нефтепродуктов. Информация об изменении цен во времени — динамике — позволяет строить прогнозы, сравнения, принимать регулирующие решения. В этом задании важна не только сама цена, но и как она менялась день ото дня. Ряд — упорядоченный набор данных. Изменение порядка данных приведет к потере важной информации и даст нам другой ряд с другими свойствами.

[1] Баррель (от англ. barrel бочка) — мера объема, равная примерно 159 л.

Обсуждение ответов должно привести к следующим *выводам.* Выборки и ряды — специальные виды данных. Они требуют особых способов описания и обработки. Поэтому мы не будем специально изучать выборки и ряды, но все равно при изучении данных разной природы нам придется обсуждать, можно ли применить те или иные способы описания.

Рассмотрим какой-нибудь числовой набор данных. Пусть это будет рост пятнадцати случайно выбранных взрослых женщин в сантиметрах:

154, 157, 159, 161, 161, 163, 164, 164,
165, 168, 168, 169, 172, 174, 178.

Для наглядности нанесем эти значения на координатную прямую (рис. 1).

Рис. 1

Мы видим, что все значения расположены на отрезке от 154 до 178. Середина отрезка значений — 166. Легко найти среднее арифметическое: приближенно 165,13. Позже мы подробно изучим медиану, а сейчас просто скажем, что медиана этих данных равна 164 см. Все эти значения (и вообще любое значение от 154 до 178 см) можно рассматривать как *центральную меру* данного набора. Вместо слов «центральная мера» часто используют просто слово «среднее» (необязательно при этом имеется в виду среднее арифметическое).

В одних случаях удобны одни средние, в других случаях — другие.

Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

– В каких случаях важно знать наибольшее или наименьшее значение?

– Чем удобна середина отрезка?

– Чем хорошо среднее арифметическое?

Желательный результат обсуждения. Если нас интересует самый высокий человек, то нужно ориентироваться на максимум (например, при проектировании дверей в домах). Если мы проектируем офисную мебель, то нужно опираться и на максимум, и на минимум (стул должен регулироваться так, чтобы даже самая низкорослая сотрудница доставала ногами до пола). Середина отрезка очень удобна, поскольку очень легко и быстро вычисляется. Но она зависит только от наибольшего и наименьшего значений, а потому является ненадежным средним:

слишком сильно подвержена случайной изменчивости. Среднее арифметическое надежнее: оно зависит от всех значений в наборе. Но оно также имеет недостатки: например, не для всех данных оно имеет смысл.

Задание 3. Сергей сдавал зачет по прыжкам в длину с места. В трех попытках у него получились следующие результаты: 165 см, 140 см, 178 см. Какую «центральную меру» учитель физкультуры впишет в журнал напротив фамилии Сергея? Имеет ли смысл здесь вычислять среднее арифметическое?

Задание 4. Маша сдавала зачет по бегу на 60 м. У нее в трех попытках были следующие результаты: 11,3 с, 9,9 с и 10,1 с. Какую «центральную меру» учитель физкультуры впишет в журнал напротив фамилии Маши? Имеет ли тут смысл вычислять среднее арифметическое?

Желательный результат обсуждения. Несколько попыток нужно, чтобы выбрать лучшую. В журнал вписывается лучший результат, а не средний. В задании 3 — это максимум, 178 см, а в задании 4 — это минимум, 9,9 с. Выбор описательной характеристики зависит от природы данных (в одном случае это время, а в другом — дальность прыжка) и от цели исследования (в обоих заданиях — это поиск лучшего результата).

Задание 5. У Васи по математике за четверть накопилось 10 отметок: 2, 3, 2, 4, 4, 3, 4, 2, 5, 3.

Учитель ставит четвертную отметку по обычному правилу: находит среднее арифметическое и округляет до целого. Имеет ли смысл, на ваш взгляд, такой способ выведения итоговой отметки с точки зрения математики?

Желательный результат обсуждения. Школьные отметки, к которым мы привыкли, — это цифры, которыми в 1947 году заменили словесные оценки «плохо», «посредственно», «хорошо» и «отлично». Можно ли найти среднее арифметическое словесных оценок? Конечно нет: непонятно, как складывать слова. Цифровые отметки складывать можно, но смысла от этого не прибавится: двойка плюс пятерка не даст отметку семь. Поэтому в школах среднюю отметку считают, пользуясь средним арифметическим. Здесь есть три причины, и неясно, какая главная.

1. Среднее арифметическое в равной степени учитывает все отметки.

2. Среднее арифметическое очень просто вычислять.

3. Так повелось издавна, и все к этому привыкли.

Поэтому с отсутствием «математического смысла» со средней арифметической отметкой все смирились.

Обсуждение ответов должно привести к следующим *выводам.* Числовые данные сначала нужно подходящим способом представить, а затем описать. Однородные данные удобно описывать одним числом — центральной мерой, или мерой центральной тенденции, или, попросту говоря, каким-либо средним. Таких характеристик множество (например, среднее арифметическое, минимум, максимум, середина отрезка значений). Выбор среднего делают, учитывая три обстоятельства.

1. Природа данных (в одном случае естественно вычислять среднее арифметическое, в другом — максимум и т.п.).

2. Цель исследования (проектирование мебели, спортивные рекорды).

3. Сложившаяся традиция (может быть, полезно найти что-то другое, но все привыкли делать по-старому, и ничего не хочется менять).

Рекомендуемое домашнее задание

1. Перед проектированием железнодорожного моста через реку изыскатели собирают данные о паводковом уровне этой реки за много лет. Для чего нужны эти данные? Какая мера собранных данных важна в этом случае?

2. Комментатор футбольного матча часто сообщает слушателям средний возраст игроков команды (среднее арифметическое). Подумайте, является ли среднее арифметическое возрастов игроков подходящим описанием возраста «типичного игрока команды». Обоснуйте свое мнение.

3. Во многих случаях (например, при рассмотрении заявки на кредит или заявления на визу) работающего гражданина спрашивают о среднем доходе за последние три месяца. Как вы думаете, почему не имеет смысла спрашивать о среднем доходе за более длительный период? Обоснуйте свое мнение.

4. Гражданин П. собрал все квитанции об оплате ЖКУ (квартплата, электричество, вода) за последние три года и нашел среднее арифметическое всех оплат. Может ли гражданин П. ориентироваться на полученное значение в будущем? Обоснуйте свое мнение.

Предполагаемые ответы. **1.** Нужно знать наибольший уровень. Мост должен быть выше максимального уровня подъема воды. **2.** Среднее арифметическое здесь — дань традиции. Ведь возраст игрока — несуммируемая величина. **3.** Цель такого опроса — понять, насколько гражданин платежеспособен в настоящее время. Включение в опрос давних зар-

плат может исказить картину. Например, раньше человек зарабатывал очень много, но потерял работу. Среднее большое, но не отражает нынешнее состояние дел. Или наоборот, полгода назад гражданин устроился на высокооплачиваемую работу и сейчас не испытывает трудностей, но старые данные покажут низкое среднее, не соответствующее текущему благосостоянию.
4. К сожалению, тарифы на ЖКУ растут. Среднее за три предыдущих года никак не описывает будущие тарифы: оно может оказаться ниже, чем наименьший платеж в наступающем году. Гражданин П. выбрал неудачный способ описания временного ряда.

Урок: «Среднее арифметическое числового набора»

Цель урока: сформировать у учащихся понимание о роли среднего арифметического как наиболее употребительного среднего. Учащиеся должны развить умение находить среднее арифметическое числовых наборов с использованием калькулятора, должны понять, что среднее арифметическое применимо не всегда, и научиться приводить примеры, где среднее арифметическое не является подходящим описательным параметром.

Оборудование: калькулятор.

С понятием *среднего арифметического* учащиеся знакомы с 5-го или 6-го класса. Оно встречалось нам и в нескольких предыдущих уроках. Рассмотрим еще несколько заданий.

Среднее арифметическое набора чисел равно сумме этих чисел, деленной на их количество. В качестве центральной меры среднее арифметическое используется настолько часто в самых разных областях, что его иногда называют просто средним значением или еще короче — средним. Если кто-то говорит «среднее» или «среднее значение», то, скорее всего, имеется в виду среднее арифметическое.

Среднее арифметическое имеет ясный физический смысл. Если все числа набора данных расположить на числовой прямой и мысленно поместить в каждую из полученных точек одинаковый груз, то среднее арифметическое окажется в точке равновесия. То есть если «положить» эту нагруженную числовую ось на опору, то система окажется в равновесии, если опора придется в точности на среднее арифметическое чисел набора (см. с. 45 учебника). На рисунке 1 показаны данные о росте 15 женщин из предыдущего урока на числовой оси. Прямая находится в «равновесии», опираясь на точку 165,13 см — среднее арифметическое данных.

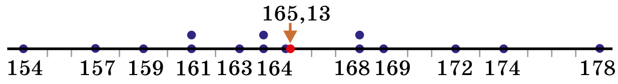

Рис. 1

Задание 1. (Таблица 1, с. 44, с обновленными данными.) Рассмотрим данные о производстве пшеницы в России в 2008–2017 годах.

Таблица 1

Год	2008	2009	2010	2011	2012
Производство (млн т)	63,8	61,7	41,5	56,2	37,7
Год	2013	2014	2015	2016	2017
Производство (млн т)	52,1	59,7	61,6	73,3	85,8

1. Каким было производство пшеницы в 2009 г., в 2016 г.?

2. В каком году производство пшеницы было: а) наибольшим; б) наименьшим?

3. Найдите среднее арифметическое данных за 10 лет. Совпадает ли среднее производство пшеницы за 10 лет со значением в каком-нибудь году?

4. В каком году или в каких годах производство пшеницы ближе всего к среднему за 10 лет?

5. Можно ли опираться на вычисленное среднее арифметическое как на прогноз ожидаемого производства пшеницы в будущие годы?

Желательный результат обсуждения. Задача очень простая. Ее назначение — сфокусировать внимание школьников на следующем аспекте. Минимум и максимум есть среди данных. Среднего арифметического, как правило, нет. В данном случае среднее равно 59,3 млн тонн, но нет ни одного года, когда урожай был именно таким. Ближайшие по производству пшеницы годы: 2014 г. (59,7 млн т) и 2011 г. (56,2 млн т). Эти данные действительно близки к среднему, к 59,3 млн тонн. Чтобы оценить, насколько хорошо данные группируются около среднего, удобно изобразить их на числовой оси (рис. 2).

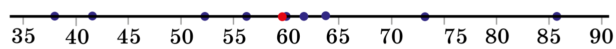

Рис. 2

Видно, что основная масса точек группируется вблизи среднего (точка 59,3) на промежутке 50–65 млн т. Это говорит о том, что среднее арифметическое удовлетворительно или даже хорошо описывает производство пшеницы в прошедшем десятилетии.

А вот с прогнозом на будущее все сложнее. Последние годы производство пшеницы в России растет. Увеличивается экспорт, расширяются посевные площади. За последние пять лет средний урожай составляет 66,5 млн т. Среднее 59,3 млн т, скорее всего, непригодно для прогнозов.

Задание 2. (№ 18, с. 47, с обновленными данными.) В таблице 2 дана численность населения шести крупнейших городов Московской области в разные годы в тысячах человек.

Таблица 2

Город	Количество жителей (тыс. чел.) по годам							
	1959	1970	1979	1992	2002	2015	2017	2018
Балашиха	58	92	118	138	148	261	451	468
Королев	41	106	133	136	143	221	222	223
Люберцы	93	139	160	164	157	189	198	203
Мытищи	99	119	141	154	160	187	205	212
Подольск	129	169	202	208	181	224	300	303
Химки	48	85	118	136	141	232	245	251

1. Сравните эту обновленную таблицу с таблицей из учебника. Какие города вышли из списка крупнейших шести городов, а какие вошли в этот список за период с 2006 по 2018 год?

2. Если присмотреться, можно найти небольшие расхождения в данных (например, в учебнике написано, что в Подольске в 2002 году проживало 182 тыс. чел., а в таблице 2 указано 181 тыс. чел.). Чем могут объясняться такие расхождения?

3. Найдите среднее число жителей крупнейших городов Московской области из таблицы 2:

а) в 1959 г.; б) в 1992 г.;
в) в 2002 г.; г) в 2018 г.

4. Сравните среднее число жителей в этих городах в 1959 г. и в 1970 г. Верно ли, что число жителей возросло за эти годы?

5. Сравните среднее число жителей в данных городах в 1992 г. и в 2002 г. Верно ли, что число жителей возросло за эти годы?

6. Подумайте, чем может объясняться резкий прирост или резкое падение численности жителей подмосковного города (обратите внимание на Балашиху в 2017 г.).

7. Во все ли годы среднее арифметическое хорошо описывает численность населения крупного подмосковного города?

Желательный результат обсуждения. Из «топ-6» вышла Коломна, которую обогнал Королев. Расхождения можно объяснить тем, что данные могут браться из разных источников, подсчет может вестись разными методами, да и сами источники могут обновляться.

Добавим к таблице 2 еще одну строку — среднюю численность населения во все годы. Выделим жирным шрифтом те годы, о которых идет речь в задании 3 (табл. 3).

Таблица 3

Город	Количество жителей (тыс. чел.) по годам							
	1959	1970	1979	1992	2002	2015	2017	2018
Балашиха	58	92	118	138	148	261	451	468
Королев	41	106	133	136	143	221	222	223
Люберцы	93	139	160	164	157	189	198	203
Мытищи	99	119	141	154	160	187	205	212
Подольск	129	169	202	208	181	224	300	303
Химки	48	85	118	136	141	232	245	251
Среднее	**78**	121	148	**156**	**155**	219	270	**277**

Среднее разумно округлить до целого числа тысяч человек, поскольку так округлены исходные данные. К 1970 году среднее население этих городов выросло почти вдвое по сравнению с 1959 годом. А за 10 лет, с 1992 по 2002 год, роста не было, среднее население даже упало на 1000 человек. Но учтем, что измерение численности населения весьма приблизительное, поэтому ошибка в 1–2 тыс. чел. весьма вероятна. Утверждать, что население этих городов за 1992–2002 годы в реальности сократилось, не следует. Все, что мы видим, — это отсутствие резкого изменения.

Очень резкий рост средней численности виден в 2017 году. Случилось это за счет Балашихи. Небольшие изменения численности можно объяснить повышением рождаемости, присоединением небольших населенных пунктов или миграцией. Но из таблицы 2 видно, что в Балашихе случилось что-то из ряда вон выходящее. Дело в том, что в 2015 году к Балашихе был присоединен город Железнодорожный, который прежде был отдельным городом с населением 152 тыс. чел.

До 2015 года среднее арифметическое более-менее разумно описывает население городов. Например, в 2015 году среднее 219 тыс. чел. близко к населению Королева и Подольска. Но после резкого увеличения территории Балашихи однородность массива данных оказалась нарушена: в 2018 году нет ни одного города, население которого было близко к среднему значению 277 тыс. чел. (ближе всего Подольск и Химки, но в обоих случаях отличие в 26 тыс. чел.). Так случается, когда среди значений появляются одно-два, очень сильно отличающиеся от остальных. Такие значения мы называем *статистическими выбросами*. В таких случаях среднее арифметическое не очень хорошо описывает массив данных.

Обсуждение ответов должно привести к следующим *выводам*. Среднее арифметическое имеет ясный физический смысл — «точка равновесия массива данных». Среднее арифметическое разумно и удобно применять для суммируемых величин (объем производства, доходы, расходы, численность населения).

Но иногда случается, что среднее очень далеко от типичных значений. Так часто бывает, когда данные содержат один или несколько выбросов (значений, которые очень сильно отличаются от остальных). В таком случае среднее плохо описывает массив данных.

Часто среднее, подсчитанное за некоторый период, нельзя использовать для оценки будущих значений величины. Так происходит, если величина существенно меняется во времени, как, например, производство пшеницы, стоимость нефти и т.п. В таких случаях среднее может хорошо описывать имеющиеся данные, но бесполезно для прогнозов.

Задачи, рекомендуемые для решения на уроке: с. 45, № 1–3; с. 46, № 4; с. 47, № 18.

Рекомендуемое домашнее задание: с. 47, № 17; с. 48, № 20.

Урок: «Среднее арифметическое. Решение задач»

Цель урока: сформировать у учащихся представление о поведении среднего арифметического при изменении одной из величин в числовом наборе (массиве данных) и о том, как формируется среднее при добавлении чисел или объединении числовых наборов. Учащиеся должны научиться вычислять в уме средние наборов равноотстоящих чисел, преобразовывать средние при сдвиге набора или умножении всех значений на один и тот же множитель.

Если в наборе всего два числа, то их среднее арифметическое находится в точности посередине между этими числами (удобно представить числа на числовой прямой).

Задача 1. (№ 5 (а), с. 46) Найдите среднее арифметическое чисел 8 и 10.

Решение. Посередине между этими числами находится число 9. Это и есть среднее. Иногда этот прием помогает, даже когда чисел в наборе больше двух.

Задача 2. (№ 6 (б), с. 46) Найдите среднее арифметическое чисел 6, 10, 16 и 20.

Решение. Среднее двух крайних чисел 6 и 20 равно 13. Среднее двух «внутренних» чисел 10 и 16 также равно 13. Поэтому среднее арифметическое всего набора равно 13.

Здесь мы использовали свойство среднего арифметического: если у двух числовых наборов одинаковые средние, то, объединив эти наборы в один, мы получим набор чисел с таким же средним.

Задача 3. В числовом наборе 9 чисел, их среднее арифметическое равно 6. К этому набору добавили еще одно число — x. Найдите среднее арифметическое чисел получившегося набора, если: а) $x = -7$; б) $x = 6$; в) $x = 12$.

Без вычислений определите, увеличится или уменьшится среднее арифметическое в каждом случае.

Решение. а) Добавляется число, которое меньше среднего. Значит, среднее должно уменьшиться. Сумма чисел нового набора равна

$$9 \cdot 6 + x = 9 \cdot 6 - 7.$$

Значит, новое среднее равно

$$\frac{9 \cdot 6 - 7}{10} = \frac{44}{10} = 4{,}4.$$

Аналогично решаются пункты «б» и «в». В пункте «б» можно сразу заметить, что поскольку добавляется число 6 (равное среднему), то среднее арифметическое не изменится.

Ответы: б) 6; в) 6,6.

Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

В задаче 2 мы объединяли два набора чисел с одинаковым средним. В задаче 3 мы добавляли к числовому набору одно значение. Что будет, если объединить наборы, в которых разные средние и разное количество чисел?

Задача 4. В первом наборе 8 чисел, их среднее равно 3. Во втором наборе 12 чисел, их среднее равно 5. Наборы объединили в один набор. Найдите среднее арифметическое нового набора.

Решение. Зная, сколько в наборе чисел и каково их среднее, несложно найти сумму чисел в наборе. В первом наборе сумма чисел равна $8 \cdot 3 = 24$, а во втором наборе равна $12 \cdot 5 = 60$. Следовательно, сумма чисел в объединенном наборе равна $60 + 24 = 84$. В этом новом наборе всего $8 + 12 = 20$ чисел, значит, их среднее равно $\frac{84}{20} = 4{,}2.$

Эти пошаговые рассуждения можно заменить одним вычислением:

$$\frac{8 \cdot 3 + 12 \cdot 5}{8 + 12} = \frac{24 + 60}{20} = 4{,}2.$$

Важно! Среднее арифметическое объединенного набора расположено на числовой прямой между средними двух исходных наборов.

Так получилось неслучайно. Предложите школьникам доказать это самостоятельно.

Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

Случай из жизни. Не так давно в одной крупной московской больнице заведующий отделением неврологии получил от больничного центра медстатистики данные о среднем числе дней, которые больные провели в отделении. Пациенты, которые были госпитализированы сразу в неврологическое отделение, провели в нем в среднем 14,8 дня. Пациенты, которые были переведены после лечения в других отделениях, провели в неврологическом отделении 8,3 дня. Среднее по всем пациентам равнялось 14,9 дня. Заведующий отделением сразу заподозрил неладное. Как заведующий отделением догадался, что в предоставленной статистике ошибка?

Чтобы понять, почему среднее объединенного набора находится между средними исходных наборов, полезно про возможности рассмотреть задачу в общем виде. Пусть в первом наборе n чисел, их среднее арифметическое равно a, во втором наборе m чисел, их среднее равно b. Тогда среднее арифметическое c объединенного набора равно

$$c=\frac{na+mb}{n+m}.$$

Предположим для определенности, что $a < b$. Покажем, что $c > a$.

$$c=\frac{na+mb}{n+m}>\frac{na+ma}{n+m}=\frac{a(n+m)}{n+m}=a.$$

Аналогично доказывается, что $c < b$.

Задача 5. В числовом наборе наименьшее значение равно 2, а наибольшее равно 9. Может ли среднее арифметическое такого набора быть равно:

а) 6; б) $5\frac{1}{3}$; в) 1; г) 9?

Если может, приведите пример такого набора, если нет — объясните почему.

Решение. Для первых двух пунктов подобрать примеры несложно: 2, 7, 9 и 2, 5, 9. Сложнее обосновать ответы на пункты «в» и «г». Покажем, что число 1 не может быть средним. Предположим, что всего в наборе n чисел. Заменим все числа (в том числе и наибольшее число 9) наименьшим значением 2, при этом сумма чисел уменьшится, поэтому среднее значение тоже уменьшится и станет равно

$$\frac{\overbrace{2+2+2+\ldots+2}^{n\text{ слагаемых}}}{n}=\frac{2\cdot n}{n}=2.$$

Значит, у исходного набора среднее значение больше 2. Аналогично показываем, что среднее значение меньше 9.

Обсудите с учащимися некоторые вопросы.

В задаче 5 мы почти все числа набора заменяли на меньшие. При этом среднее арифметическое уменьшилось, поскольку сумма стала меньше. А как изменится среднее арифметическое, если увеличивать или уменьшать только одно значение набора?

Задача 6. В числовом наборе 23 числа. Одно (какое-то) из чисел этого набора увеличили на 1. Как и на сколько изменилось среднее арифметическое этого набора?

Решение. Предположим, что сумма чисел набора равна A. Тогда среднее арифметическое равно $\frac{A}{23}$. Теперь увеличим одно число на 1. Теперь сумма равна $A+1$, а среднее равно $\frac{A+1}{23}$. Чтобы узнать, на сколько выросло среднее, вычтем из нового среднего старое:

$$\frac{A+1}{23}-\frac{A}{23}=\frac{1}{23}.$$

Значит, если в наборе n чисел и одно (любое) число увеличить (уменьшить) на число k, то среднее увеличится (уменьшится) на число $\frac{k}{n}$.

Обсудите с учащимися, что означает этот результат.

Желательный результат обсуждения. Мы знаем, что среднее арифметическое числового набора зависит *от всех значений*. Эта задача показывает нам, как среднее зависит от каждого значения в отдельности. Если значение увеличивать, то среднее арифметическое тоже растет, но в n раз медленнее! Можно сказать, что *среднее арифметическое в n раз устойчивее, чем каждое отдельное значение* в массиве данных. Это важное свойство: отдельные значения подвержены значительной изменчивости (одни больше, другие меньше), но влияние каждого отдельного значения на среднее не очень велико). Среднее арифметическое числового набора подвержено изменчивости гораздо меньше, чем отдельные значения.

Задача 7. (№ 11, с. 46) Вычислите среднее арифметическое чисел:

а) 1, 2, 3, 4, 5;
б) 1, 2, 3, 4, 10;
в) 1, 2, 3, 4, 100;
г) 1, 2, 3, 4, 1000.

Выполняя это упражнение, проследите, как меняется среднее арифметическое при увеличении только одного (последнего) числа в наборе данных. Проверьте, выполняется ли свойство, найденное нами в задаче 6.

Мы изучили вопрос, как меняется среднее при изменении одного числа в наборе. Что будет, если все числа изменятся одновременно и одинаково?

Задача 8. (№ 12 (а, в), с. 46) Вычислите среднее арифметическое двух числовых наборов:

1, 2, 3, 4, 5 и 3, 4, 5, 6, 7.

Сначала предложите учащимся посмотреть, что общего у этих двух наборов и чем они отличаются. Школьники найдут, что числа второго набора получаются из чисел первого прибавлением числа 2. Можно сказать, что первый набор «сдвинули» на 2 единицы вправо. Что произойдет со средним арифметическим? Ясно, что оно тоже сдвинется на 2 единицы вправо.

Решение. Среднее арифметическое первого набора равно 3 (находим без вычислений как середину набора равноотстоящих чисел), среднее арифметическое второго набора равно 5 (тоже середина). Действительно, среднее у второго набора на 2 больше, чем у первого.

Можно предложить школьникам доказать в общем виде, что при сдвиге всех чисел в наборе среднее арифметическое «двигается» на ту же величину[2]. Мы научились «двигать» набор вместе со средним арифметическим. А можно ли «растягивать» или «сжимать» набор? Это можно делать, умножая все числа набора на одно и то же число.

Задача 9. (№ 15 (а, б)) Вычислите среднее арифметическое двух числовых наборов:

2, 4, 7, 8, 9 и 20, 40, 70, 80, 90.

Так же как и в задаче 8, предложите школьникам сперва найти общее этих наборов. Учащиеся заметят, что второй набор получен из первого умножением на 10.

Решение. Среднее арифметическое первого набора придется подсчитать: сумма чисел равна 30, среднее равно 30 : 5 = 6. А вот среднее арифметическое второго набора теперь найти легко, поскольку ясно, что 10 можно вынести за скобки:

$$\frac{20+40+70+80+90}{5}=$$

$$=10\cdot\frac{2+4+7+8+9}{5}=10\cdot 6=60.$$

Задачи, рекомендуемые для решения на уроке: с. 46, № 5 (а), 6 (б), 7, 11, 12 (а, в), 15 (а, б).

Рекомендуемое домашнее задание: с. 46, № 8, 9, 14 (б, г), 16.

Выводы и итоги урока. Самое главное: среднее арифметическое всегда расположено между наибольшим и наименьшим значениями массива данных. Оно действительно является средним значением.

Теперь мы умеем быстро находить среднее арифметическое, если числа в наборе равноотстоящие: нужно просто взять середину отрезка значений.

Мы научились вычислять среднее объединенных наборов: для этого достаточно знать средние этих наборов и количества чисел в них. Среднее арифметическое объединенного набора находится между средними арифметическими исходных наборов.

Мы знаем, что если «двигать» все числа набора, то среднее «двигается» вместе с ними на ту же величину.

Если все числа набора умножить на одно и то же число, среднее арифметическое умножится на то же самое число.

[2] Это будет сделано в одном из следующих уроков в теме «Свойства среднего арифметического».

Из интернета

Российские школьники завоевали на Китайской олимпиаде по математике три золотые и три серебряные медали

nplus1.ru. Текст: Слава Гоменюк, фото Кирилла Сухова

Сборная России приняла участие в Китайской национальной олимпиаде в Ухани. Школьники участвовали в ней впервые с 2019 года. Всего команда заработала три золотые и три серебряные медали. Об этом на своей странице в социальной сети «ВКонтакте» сообщил руководитель сборной Кирилл Сухов.

Золотых медалей удостоились Ратибор Коптилин (Новосибирск), Илья Смирнов (Ярославль) и Илья Згонник (Санкт-Петербург). Петербуржцы Федор Никитин, Михаил Югов и Егор Сапрунов получили серебряные медали. Китайская национальная олимпиада считается «тренировочной» перед Международной математической олимпиадой, к участию в ней приглашаются команды школьников из России, Сингапура, Макао и Гонконга.