Иван Высоцкий

СТАС И ЗАДАЧА КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Часть 3

Окончание. Начало в №№ 9–10

ВТОРНИК, 8:10

По дороге в школу Стас обычно думал две мысли. Первая – подлиннée – думалась от дома до перехода через улицу, а вторая, покороче, – от перехода до школы. Думать на переходе нужно о переходе. Сегодня Стас размышлял о том, что раз не получается упростить эту противную сумму (про себя он её назвал числом Вики), то нужно посчитать её на калькуляторе. Вторая половина дороги принесла идею получше: сегодня на втором уроке информатика. Стас улучит пару минут и посчитает в Excel. Это удобнее, чем на калькуляторе.

	A	B	C
1			
2		1	1
3		2	0,5
4		3	0,333333
5		4	0,25
6		5	0,2
7		6	0,166667
8		7	0,142857
9		8	0,125
10			**2,717857**

Всё заняло не более двух минут, так что учительница информатики даже не заметила, что Стас занят посторонними делами. Вышло, что число Вики равно

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=2{,}718$$

с округлением до тысячных. Ещё нужно умножить на 8. Получилось 21,743. Вот сколько шоколадных яиц требуется на коллекцию из восьми принцесс. В среднем.

На перемене Стас подошёл к Смирновой:

– Наташ, слушай, я знаю, сколько нужно киндер-сюрпризов, чтобы собрать Вике всю коллекцию вместе с Авророй.

– Я тоже знаю.

Поражённый Стас секунду молчал. Затем неуверенно спросил:

– Сколько у тебя получилось?

– 24.

– А вот и нет! Меньше! Если точно, то 21,743.

Наталья посмотрела на друга с тревогой.

– Ты вообще здоров? Во-первых, мама вчера купила двадцать четвёртый киндер, и там была Аврора. Вика счастлива. Так что ровно 24. А во-вторых, кто тебе продаст тысячную часть киндер-сюрприза? Это как полтора землекопа.

В детстве Стас тоже смотрел мультик про двоечника Николая Перестукина, у которого в ответе получились полтора землекопа. Тогда Стас ещё подумал, что над бедным Колей зря насмехаются. В сущности, почему не может быть полутора землекопов? Ведь если один землекоп за день роет траншею длиной 20 метров, то сколько землекопов нужно, чтобы вырыть 30 метров? Разумеется, полтора. Просто в учебнике математики числа подобраны так, чтобы землекопов было целое число. Это нечестно. Можно подумать, что в жизни все траншеи всегда нужной длины. Бывает полтора землекопа! И 7/3 попытки бывает – спросите Патрика. И в среднем 21,743 киндер-сюрприза тоже бывает.

– Понимаешь, это вам пришлось купить 24 яйца. А кому-то потребуется 21, или 30, или даже больше. Зато кому-то хватит и восьми. А в среднем – как раз 21,743. Это просто. Я тебе покажу. Смотри, с каждой новой принцессой вероятность...

Но тут Стас осёкся: по выражению лица Наташки он понял, что его математический гений никто не оценит и что пора изящно выйти из разговора какой-нибудь завершающей фразой.

– В общем, это в среднем, понятно?

– Понятно. А хочешь, я тебе про музыку что-нибудь расскажу? – Наталья точно знала, что Стас не хочет. – Там тоже дроби. Тебе понравится. Вот, например, гармонические обертоны. Это очень увлекательно. – Она удержала Стаса за пуговицу на рукаве.

– Гармонический обертóн, или гармóника – это тон с длиной звуковой волны, равной половине, трети или четверти длины волны основной извлекаемой ноты, – пользуясь своим отменным слухом, Наташка искусно копировала интонации своей учительницы музыки.

– А если длина равна 1/5 этой основной – это уже не гармоника? – Стас очень хотел сбежать и съехидничал в тщетной надежде освободиться.

– Тоже гармоника. Гармоник много, но слышим мы не все, а только первые, например с $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$ длины основной волны, остальные слишком тихие.

Наталья сделала круглые глаза и завершила лекцию фразой, которую считала верхом мудрости, какая только может быть в учебнике музыки: *«При колебании струны́ образуются обертоны, длины звуковых волн которых вместе с длиной основной волны формируют гармонический ряд, состоящий из долей* 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 *и так далее»*.

В голове у Стаса зазвенел колокол. Внезапно осипшим голосом он спросил:

– А как вы их складываете?

Наталья отшатнулась и даже отпустила Стасов рукав:

– Нет, ты точно спятил! Зачем их складывать? Они сами получаются, когда ударяешь по клавише пианино. Сами получаются и сами складываются в звучание.

– Да не в звучание, а в сумму! Дроби эти складываются? Ну, этим… знаком «плюс» они складываются?

Видимо, Стас спросил что-то такое, что не складывалось, точнее не укладывалось в картину мира начинающей, но перспективной пианистки Смирновой. Она молча повернулась и пошла в класс, показывая Стасу, как правильно произвести изящный выход из разговора, который свернул не туда.

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

ВТОРНИК, 14:50

По дороге домой Стас думал ещё напряжённее. Голова кружилась от сведений, которые определённо нужно было упорядочить. Цепочка таинственным образом связанных между собой объектов выглядела так.

1. Принцессы в количестве 21,743 штуки.

2. Гармоники, которые не складывают музыканты, но которые образуют гармонический ряд.

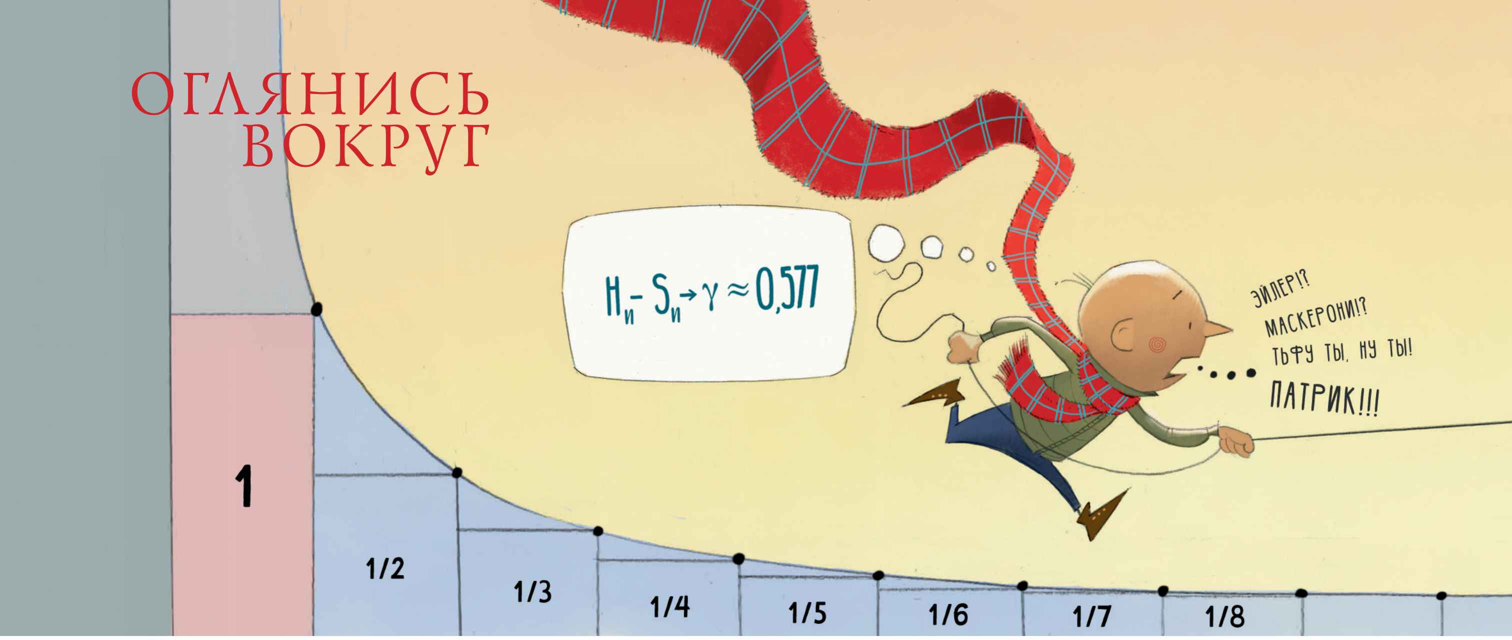
3. Гармонический ряд, которым папа советует развлечься на досуге.

«Итак... Что общего между принцессами, гармониками и папиным гармоническим рядом? Между принцессами и гармоническими обертонами общее очевидно – дроби от $\frac{1}{1}$ до $\frac{1}{8}$. Только я эти дроби пытаюсь сложить, а Наташка – нет. Папа их, кажется, складывает, но только вряд ли ради коллекции принцесс и уж точно не в музыкальных целях».

Добравшись до папиного кабинета, Стас начал искать книгу, которую он тогда видел на столе. Бесполезно. Он даже не помнит, какого она цвета. Немного подумав, Стас пошёл в свою комнату, включил компьютер и в поисковой строке браузера написал «гармонический ряд». Результат последовал тут же. Оказалось, гармонический ряд – это сумма чисел 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и так далее без конца, причём название действительно пришло из музыки, где такие дроби называют гармониками.

Краткое расследование показало, что если гармонический ряд в каком-то месте обрубить, получается число, которое тоже называют гармоническим. Например, 1 – это первое гармоническое число, $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ – это второе гармоническое число, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ – третье и так далее. Кроме того, выяснилось, что для этих чисел есть обозначение – буква H с номером. Например, число Вики, то есть восьмое гармоническое число

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$



обозначают H_8. Значит, решение задачи про восемь принцесс коротко можно записать $8H_8$. Стас уже знал, сколько это будет, но всё же – как считать гармонические числа без компьютера?

Довольно скоро Стас нашёл в интернете приближённую формулу, но она ему не понравилась: во-первых, в ней были непонятные значки, а во-вторых, она приближённая, то есть не совсем полноценная. А нужна полноценная!

Стас рассудил, что раз люди пишут приближённую формулу, то настоящей никто не знает. Значит, если он, Стас, откроет точную формулу для гармонических чисел, то её назовут его именем, а сам он станет великим математиком! Какое-то время Стас предавался мечтаниям на эту тему и, чтобы приблизить сладкий момент славы, снова принялся экспериментировать с Викиным числом H_8. Нелёгок хлеб математика! Исписав два листочка (опять пострадала тетрадь по истории), Стас почувствовал, что хорошо поработал, устал и должен переключиться на что-то другое. Это другое сейчас же явилось, мотая хвостом, и предъявило поводок: гулять!

– Пойдём, Патрик. Я на пороге великого открытия, но оно подождёт.

Патрик изо всех сил поддержал эту идею.

***

Неизвестно, куда завели Стаса и Патрика эксперименты с гармоническими числами. Не исключено, что Стас обнаружил много интересных фактов, и, скорее всего, среди них оказались следующие.

1. Гармонический ряд *расходится*, то есть

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\infty.$$

Вероятно, впервые это доказал в XIV веке учёный Николай Орем. Он нашёл очень простое рассуждение, показывающее, что эта сумма бесконечно большая. Попробуйте найти своё собственное доказательство (возможно, оно совпадёт с тем, что предложил Орем).

2. Известно великое множество равенств, которые связывают гармонические числа друг с другом и с другими специальными числами. Беда только в

том, что все эти равенства не дают простого и быстрого способа вычислений.

3. Приближённая формула, которая не понравилась Стасу, основана на том, что гармоническое число H_n немного больше площади S_n фигуры, заключённой под графиком функции обратной пропорциональности $y = \frac{1}{x}$ на отрезке от 1 до n (см. рисунок). С ростом n разность между H_n и S_n приближается к постоянному числу:

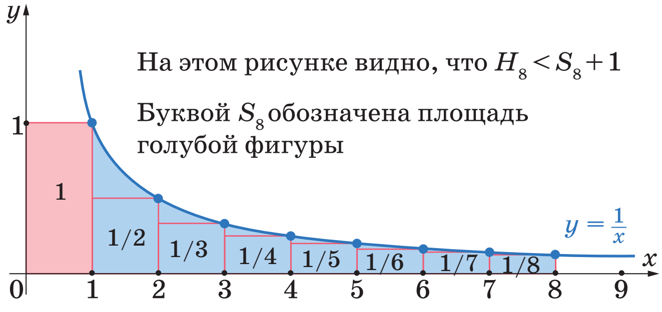
$$H_n - S_n \to \gamma \approx 0{,}577.$$

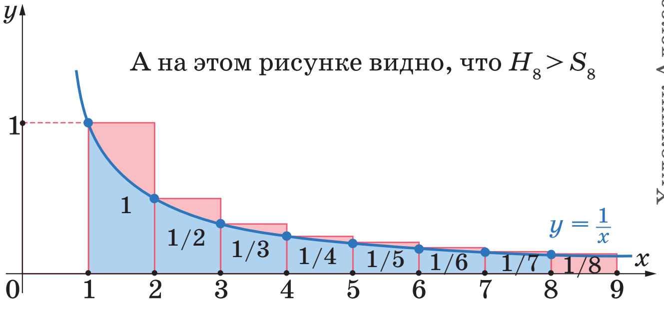
Это число γ называется *константой Эйлера–Маскерони*. Ах, если бы Стас прочитал статью «Изобретая логарифмическую линейку» из «Квантика» № 2 за 2022 год, он знал бы, как найти эту площадь и получить приближённое значение любого другого гармонического числа. Впрочем, как мы помним, приближённые равенства Стас не считает полноценными.

4. Гармонические числа появляются не только в задаче о коллекционировании. Попробуйте решить следующую не очень простую задачу.

Перестановкой *чисел от 1 до n называют последовательность этих чисел, записанных в произвольном порядке. Рассмотрим все возможные перестановки чисел от 1 до 10. Таких перестановок ровно $10! = 3\,628\,800$.*

Назовём число в перестановке ***заметным****, если оно больше всех чисел, стоящих перед ним. Найдите сумму всех заметных чисел во всех перестановках.*





Художник Алексей Вайнер