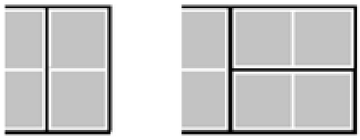
Пригласительный тур XIII олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

Ответы и решения

Вариант 1

1. а) $\frac{1}{80}$ (0,0125); б) 169 см. **2.** Например, –2, –1, 0, 6, 6, 21. **3.** 0,6. **4.** $3p^2(1-p)^4$. **5.** $\frac{18}{35}$.
6. 6,92.

7. Решение. Рассмотрим готовую дорожку. В конце дорожки лежит либо одна плитка поперек (рис. слева), либо две плитки вдоль дорожки (рис. справа).



Если в конце лежит одна плитка поперек, то слева от нее все плитки образуют дорожку длиной $n-1$ фут.

Если в конце лежат две плитки вдоль, то слева от них все прочие плитки образуют дорожку длиной $n-2$ фута. Значит, всего различных укладок длиной n футов столько же, сколько укладов длиной $n-1$ фут и укладок длиной $n-2$ фута вместе.

Начнем с малых n. Укладок длиной 1 фут всего одна (одна плитка поперек). Укладок длиной 2 фута две: две плитки поперек или две плитки вдоль. Значит, укладок длиной 3 фута уже $1+2=3=f_4$, укладок длиной 4 фута всего $2+3=5=f_5$ и так далее: укладок длиной n всего f_{n+1}.

Критерии оценивания

Полное и верное доказательство	2 балла
Полным перечислением укладок получено не менее четырех первых значений 1, 2, 3, 5, …	1 балл
Доказательство неверное либо отсутствует, нет перечисления всех вариантов укладки для четырех первых значений n.	0 баллов

8. Решение. Пусть правильные числа в таблице равны a, b, c и d. Рассмотрим события

	Есть собака	Нет собаки
Есть кошка	a	b
Нет кошки	c	d

$$A=\{Есть\ кошка\} \text{ и } B=\{Есть\ собака\}.$$

Эти события независимы, только если доля «кошатников» среди «собачников» такая же, как и среди «не собачников», то есть условная вероятность события A при условии B равна вероятности события A при условии $\overline{B}$: $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|\overline{B})$. Получаем[1] $\frac{a}{a+c}=\frac{b}{b+d}$, откуда $ad=bc$.

Из-за случайной изменчивости данных это равенство может не быть точным, но должно выполняться хотя бы приблизительно. Предположим, что в отчете Ученого верны все числа, кроме a. Тогда a приблизительно (с округлением до целых) равняется

[1] Равенство $ad=bc$ можно получить разными способами из условия независимости. Например, можно использовать равенство $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$.

$\frac{bc}{d}=\frac{1110\cdot 978}{121}\approx 8972$, а участников опроса примерно $8972+1110+978+121=11181$. Это намного больше, чем число жителей в городе, поэтому такой вариант неправдоподобен.

Предположим, теперь что неверно число b. В этом случае $b\approx\frac{ad}{c}=\frac{765\cdot 121}{978}\approx 95$, а всего респондентов примерно $765+95+978+121=1959$, что намного меньше чем 3000. Аналогично, если неверно число c, то $c\approx\frac{ad}{b}=\frac{765\cdot 121}{1110}\approx 83$, а общее число респондентов близко к $765+1110+83+121=2079$, что тоже слишком мало.

Если ошибочное число d, то $d\approx\frac{bc}{a}=\frac{1110\cdot 978}{765}\approx 1419$, а общее число участников опроса примерно равно $765+1110+978+1419=4272$. Это возможно.

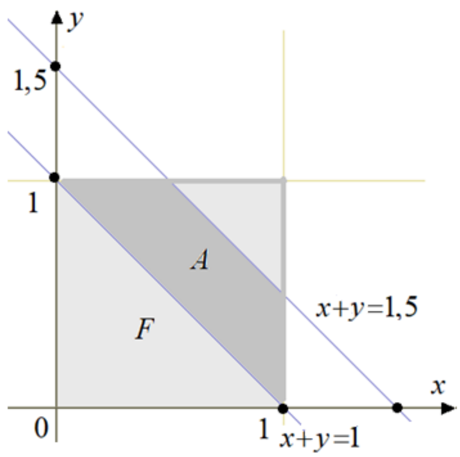
Ответ: примерно 4272 человека.

Примечание. Вместо приблизительных равенств можно использовать оценки с помощью неравенств.

Критерии оценивания

Решение полное и верное	2 балла
Ответ верный, но нет рассуждений, показывающих, что другие варианты неправдоподобны (например, имеется догадка, какое именно число неверное)	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов

9. Решение. Предположим, что у Ольги Павловны осталось x л, а у Марии Петровны осталось y л варенья. Числа x и y случайно и независимо выбираются из интервала от 0 до 1. Будем считать, что выбирается случайная точка с координатами $(x;y)$ из единичного квадрата F (см. рис.). Событие A «всего у ОП и МП осталось не менее чем 1 л, но менее чем 1,5 л варенья» записывается неравенством $1\le x+y<1{,}5$ и изображается трапецией, заключенной между прямыми $x+y=1$ и $x+y=1{,}5$. Тогда



$$\mathrm{P}(A)=\frac{S_A}{S_F}=\frac{3}{8}=0{,}375.$$

Ответ: 0,375.

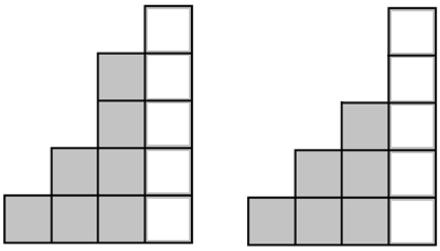
Примечание. Возможны другие способы решения.

Критерии оценивания

Решение полное и верное	3 балла
В решении содержатся верные рассуждения для отдельных случаев и сделан перебор этих случаев, для них применяется формула полной вероятности. При этом возможен неверный ответ	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов

Вариант 2

1. а) $\frac{1}{75}$ (0,0133); б) 165 см. **2.** Например, –5, –4, –3, 5, 5, 20. **3.** 0,35. **4.** $4p^3(1-p)^3$. **5.** $\frac{3}{35}$.
6. 7,93.



7. Решение. Рассмотрим какую-нибудь готовую фигуру. В ней правый столбик выше предыдущего либо на один квадрат (рис. слева), либо на два квадрата (рис. справа).

В первом случае все столбики, кроме последнего, образуют фигуру, которая получена по тем же правилам и имеет высоту $n-1$.

Во втором случае все столбики, кроме последнего, образуют фигуру, полученную по тем же правилам, но высота фигуры равна $n-2$. Значит, всего фигур высотой n ровно столько, сколько фигур высотой $n-1$ и фигур высотой $n-2$ вместе.

Начнем с малых n. Фигура высотой 1 ровно одна (один квадрат). Фигура высотой 2 тоже только одна: у нее два столбика, в которых 1 и 2 квадрата. Значит, фигур высотой 3 уже две: $1+1=2=f_3$, фигур высотой 4 всего $1+2=3=f_4$, и так далее: фигур высотой n всего f_n.

Критерии оценивания

Полное и верное доказательство	2 балла
Полным перечислением возможных фигур получено не менее четырех первых значений 1, 1, 2, 3 …	1 балл
Доказательство неверное, либо отсутствует, нет перечисления всех фигур для четырех первых значений *n*.	0 баллов

8. Решение. Пусть правильные числа в таблице равны a, b, c и d. Рассмотрим события

	Есть карта	Нет карты
Покупает в Интернете	a	b
Не покупает в Интернете	c	d

$A=\{\text{Есть карта}\}$ и $B=\{\text{Делает покупки в Интернете}\}$.

Эти события независимы, только если доля обладателей банковских карт среди интернет-покупателей такая же, как и среди тех, кто не делает покупки в интернете, то есть условная вероятность события A при условии B равна вероятности события A при условии $\bar{B}$: $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|\bar{B})$. Получаем $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$, откуда $ad=bc$.

Из-за случайной изменчивости данных это равенство может не быть точным, но должно выполняться хотя бы приблизительно. Предположим, что в отчете Ученого верны все числа, кроме a. Тогда число a должно приблизительно (с округлением до целых) равняться $\frac{bc}{d}=\frac{245\cdot 1142}{535}\approx 523$, а количество респондентов будет приблизительно равно $523+1142+535+245=2445$. Это намного больше чем 2000. Предположение неправдоподобно.

Предположим, теперь, что неверное число b. Тогда $b\approx\frac{ad}{c}=\frac{81\cdot 535}{1142}\approx 38$, а общее число участников опроса близко к $1142+535+81+38=1796$. Это возможно.

Если неверное число c, то $c \approx \frac{ad}{b} = \frac{81 \cdot 535}{245} \approx 177$, а общее число опрошенных приблизительно равняется $177 + 535 + 81 + 245 = 1038$. Это слишком мало: по условию в выборке больше чем 1500 человек.

Если ошибочное число d, то $d \approx \frac{cb}{a} = \frac{1142 \cdot 245}{81} \approx 3454$, а общая численность выборки приблизительно $1142 + 245 + 81 + 3454 = 4922$. Это также неправдоподобно.

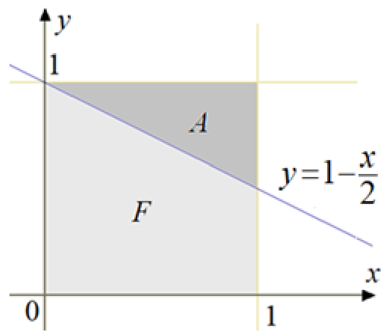
Ответ: примерно 1796 человек.

Примечание. Вместо приблизительных равенств можно использовать оценки с помощью неравенств.

Критерии оценивания

Решение полное и верное	2 балла
Ответ верный, но нет рассуждений, показывающих, что другие варианты неправдоподобны (например, имеется догадка, какое именно число неверное)	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов

9. Решение. Предположим, что у Марии Петровны осталось x л, а у Ольги Павловны осталось y л варенья. Числа x и y случайно и независимо выбираются из интервала от 0 до 1. Будем считать, что выбирается случайная точка с координатами $(x; y)$ из единичного квадрата F (см. рис.). Когда Мария Петровна съела половину оставшегося у нее варенья, у нее осталось $\frac{x}{2}$ л варенья, Поэтому событие A «у ОП и МП вместе не меньше 1 л» записывается неравенством $\frac{x}{2} + y \geq 1$ и изображается треугольником, расположенным выше прямой $y = 1 - \frac{x}{2}$. Тогда



$$\mathrm{P}(A) = \frac{S_A}{S_F} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Примечание. Возможны другие способы решения.

Критерии оценивания

Решение полное и верное	3 балла
В решении содержатся верные рассуждения для отдельных случаев и сделан перебор этих случаев, для них применяется формула полной вероятности. При этом возможен неверный ответ	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов