

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

Пояснительная записка к программе и планированию для 7 – 9 классов

В начале 2000-х годов в содержание курса математики средней школы были включены элементы теории вероятностей и статистики. Важность этого раздела в школе отмечена в Концепции развития математического образования, принятой Правительством РФ в 2013 году.

Принятию решения о появлении вероятности и статистики в школе предшествовало длительное обсуждение в педагогической и научной среде. Отдельные материалы по этой тематике давно присутствуют в школьных учебниках, однако они не являются систематическими и не формируют верного представления о предмете. Включение статистики и теории вероятностей в государственный образовательный стандарт потребовало тщательного осмысления целей и методов преподавания этих разделов математики.

В 2004 году в издательстве МЦНМО вышло первое в России регулярное учебное пособие «Теория вероятностей и статистика» для 7 – 9 классов, написанное авторским коллективом под руководством профессора Ю.Н. Тюрина. Авторы пособия сформировали целостный подход к содержанию, результатам, методам обучения и порядок обучения этой дисциплине в основной и старшей школе.

Программа по теории вероятностей и статистике, предлагаемая в рамках проекта «Математическая вертикаль» написана, исходя из тех же принципов, и опирается на подходы, сформированные в пособии Ю.Н.Тюрина.

Авторы программы отдают себе отчет в том, что вероятность и статистика все еще являются новым и непривычным для современной российской школы материалом и что учителя испытывают трудности и в понимании содержания и целей обучения, и в методике преподавания.

Поэтому в предлагаемой программе и поурочных разработках присутствуют краткие комментарии, цель которых – сориентировать учителя, определить акценты и сформулировать ясную образовательную цель каждой темы и каждого урока.

Мы стремились тщательно отобрать задачи для уроков, учитывая время и не перегружая уроки сложными занимательными задачами или трудными задачами. Зато мы стремились, особенно в статистической части, сформулировать задачи, требующие применения общих знаний и способствующие развитию общей культуры учащихся.

Авторы курса будут признательны за отклики, замечания и предложения по совершенствованию курса. Наш адрес: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11, МЦНМО, теория вероятностей. E-mail: prob-in-school@yandex.ru.

Общий подход к преподаванию вероятности и статистики в школе

Теория вероятностей и математическая статистика сформировались в научные дисциплины позже большинства других разделов математики. Однако осознание важности этих разделов в различных областях человеческой деятельности в середине прошлого века поставило вопрос о включении элементов этих дисциплин в школьную программу. В России этот вопрос начал обсуждаться еще раньше. Еще в 1914 году он рассматривался на заседании секции математики Российской академии наук, рекомендовавшей включение элементов теории вероятностей и статистики в школьные программы.

Учитывая накопленный опыт преподавания вероятности и статистики, при разработке программ, содержания материала для уроков и общего подхода к методике мы старались руководствоваться следующими принципами:

- дать законченное элементарное представление о теории вероятностей и статистике и их тесной взаимосвязи;
- подчеркивать связь этих разделов математики с окружающим миром как на стадии введения понятий, так и на стадии использования результатов;
- избегать излишнего математического формализма;
- избегать утративших актуальность примеров и задач, в том числе не злоупотреблять задачами про игры;

На наш взгляд, изучение элементов теории вероятностей и статистики в школе *должно начинаться со статистики, а не с теории вероятностей*, точно так же как рисование простых фигур должно предшествовать изучению геометрических теорем. На простом, наглядном материале должна развиваться одна из главных идей — концепция случайной изменчивости. Для показа и разъяснения случайной изменчивости следует привлекать самые различные источники от государственной статистики до примеров из повседневной жизни учащихся, школьные отметки, данные из биологии, географии, экологии, экономики и т. п.

Одновременно с идеей случайной изменчивости появляются простейшие числовые показатели, описывающие эту изменчивость в целом: среднее арифметическое, медиана, отклонения от среднего, размах данных и дисперсия. При изложении описательной статистики в седьмом классе следует избегать формализма, не следует использовать переменные с индексами, формальные определения и доказательства. В то же время важно показать, как может вести себя среднее арифметическое для различных наборов чисел, пояснить, когда оно дает хорошее представление о массиве наблюдений, а когда нет.

К средним значениям и рассеиванию данных мы обращаемся впоследствии, когда в 9 классе обсуждаем числовые характеристики дискретных случайных величин — математическое ожидание и дисперсию. Другими словами, статистические характеристики, вводимые сначала на уровне здравого смысла как описание числовых данных, получают теоретическую трактовку в дальнейшем при изучении теории вероятностей.

Знакомство с элементами теории вероятностей следует начать с понятий о случайных событиях и вероятности как мере правдоподобия этих событий. Следует с самого начала сформировать у учащихся аналогию между длиной линии, площадью фигуры, объемом тела и вероятностью события — это различные меры, сходственные во многих отношениях. Так же как в школьной математике не следует пытаться точно определить, что такое площадь или объем, *не следует пытаться точно определить, что такое вероятность события, но ограничиться интуитивными представлениями о ней*.

На этом этапе *не следует связывать вероятность с комбинаторными формулами*, как это часто делается в вузах. Комбинаторное изложение вероятности является, по-видимому, ненужной данью истории, резко сужает круг задач и вопросов, доступных для рассмотрения, в то же время неоправданно усложняя предмет.

Переходя далее к математическому описанию случайных явлений, *мы обращаем особое внимание на понятие случайного эксперимента* и на его важность для всей последующей математической формализации случайности (хотя мы остаемся в рамках интуитивной вероятности). Ровно в той же степени, в какой задача на движение задает набор условий и ограничений, описание случайного опыта приводит нас к выбору подходящего множества элементарных событий и назначению их вероятностей. Такой подход особенно важен, поскольку во многих внешне простых и естественных задачах четко не говорится о том, как устроен случайный эксперимент. Это не раз приводило ученых к спорам и парадоксам, которых следовало бы избегать хотя бы в школьном курсе.

Важное место в школьном курсе вероятности занимают равновозможные события. Представление о равновозможности сформировалось естественным образом при решении задач, связанных с играми. Однако и без игровых экспериментов равновозможность не утрачивает актуальности. Она лежит в основе простого случайного выбора, на котором базируются методики выборочных исследований, включая контроль качества продукции и социологические опросы. Однако *было бы ошибкой ограничиться обсуждением только случайных опытов с равновозможными исходами*. Такой подход неизбежно приводит к формированию устойчивого ложного представления, что в основе всех вероятностных опытов лежит равновозможность. В разных задачах мы подчеркиваем, что на практике наиболее интересные опыты устроены сложнее, чем равновозможный выбор. Взгляд авторов на значение равновозможных и неравновозможных элементарных событий накладывает отпечаток на отношение к комбинаторике в курсе теории вероятностей. Изучение комбинаторики должно быть направлено на решение вероятностных задач, а не наоборот, как часто бывает — вероятностные задачи подбираются как иллюстрация комбинаторных формул. Важно научить школьников организованному перебору комбинаций, а не комбинаторным теоремам и преобразованиям выражений с числами сочетаний. Комбинаторные факты должны появиться тогда, когда множество элементарных исходов становится слишком большим для того, чтобы описать его простым полным перебором. Важно дать наглядное представление о том, как и где используются комбинаторные принципы, а не заучивать «схему урн с различимыми или неразличимыми шарами разного цвета» или «выборку с возвращением или без».

Переход от элементарных событий к произвольным случайным событиям и операциям может быть сделан без привлечения понятия о множествах, хотя операции над событиями полностью аналогичны операциям над множествами. Мы надеемся, что для части учителей эта аналогия облегчит преподавание. Те учителя, которые сочтут возможным и полезным привлечение теоретико-множественных аналогий, не совершат ошибки. В любом случае очень наглядны и полезны диаграммы Эйлера, показывающие, как соотносятся друг с другом разные события одного случайного опыта.

Схема испытаний Бернулли является не только относительно простой, полезной и распространенной на практике моделью описания однотипных повторяющихся независимых опытов с двумя возможными исходами, но играет в теории вероятностей важнейшую роль, давая метод оценки вероятностей многих событий. Об этом следует говорить сперва на интуитивном уровне, обсуждая вероятности и частоты событий, а затем — более формально, говоря об измерении вероятностей и законе больших чисел в курсе 9-го класса. Последний материал требует определенной подготовки учащихся и изучения вопросов, связанных с характеристиками случайных величин.

Тема «Геометрическая вероятность» во многом является данью исторической традиции. В ее изложении много подводных камней и трудностей, которые следует обходить. Содержательное математическое обсуждение этих трудностей на школьном уровне нецелесообразно и практически невозможно. Однако при работе с этим материалом учитель и учащиеся получают возможность повторить материал из курса геометрии и укрепить навыки формализации текстовых вероятностных задач, используя геометрические объекты.

Темы, связанные со случайными величинами и их характеристиками — математическим ожиданием и дисперсией — в значительной степени избыточны и могут быть включены в курс основной школы не полностью или даваться обзорно. Однако именно этот материал, включая закон больших чисел, устанавливает обратную связь между понятиями теории вероятностей и статистики. Собственно, знакомство с законом больших чисел и его действием является одной из основных целей включения вероятности и статистики в школьный курс. Поэтому мы рекомендуем включить эти вопросы в 7 — 9 классы с тем, чтобы вернуться к этому материалу в старшей школе на более высоком уровне. От-

метим, что *первое представление о случайных величинах дается нами при изучении описательной статистики в 7 классе, когда речь идет о величинах, подверженных случайной изменчивости.*

Мы предлагаем для специального обсуждения в уроках два опыта, порождающих два важных распределения. Первый опыт — серия испытаний Бернулли. Второй — серия попыток (испытаний) до достижения первого успеха. В серии испытаний Бернулли появляется естественная случайная величина «Число успехов», а в серии до первого успеха — случайная величина «Число сделанных попыток».

Обсуждение случайной величины «Число успехов в серии Бернулли» и ее свойств дают возможность содержательно (неформально!) сформулировать закон больших чисел, который несет мировоззренческую нагрузку, показывая, как и почему усреднение изменчивых величин отражает явления окружающего мира. Неявно обсуждение закона больших чисел начинается еще при решении простых задач по статистике в 7 классе, где, обсуждая случайную изменчивость, мы волей-неволей обращаем внимание на то, что средние значения однотипных наборов различных величин заметно меньше отличаются друг от друга, чем отдельные значения. Другими словами, *статистическая устойчивость, наблюдаемая при занятиях статистикой, приводит к предположению о наличии закономерностей в случайном, и, тем самым, ведет нас к теории вероятностей как к математической науке, объясняющей и изучающей эти закономерности.*

Отдельно обратим внимание на ряд методических приемов, использованных при составлении задач и играющих важную роль.

1. Минимальный формализм в записи выражений и определениях.
2. Подчеркивание связи с практикой.
3. Использование сквозных примеров и задач при обсуждении разных тем.
4. Максимальная ясность и простота формулировок.
5. Выделение более сложных задач символом *.
6. Отсутствие однозначного ответа в некоторых задачах и вопросах по статистике. В основном такие задачи предполагают обсуждение и требуют разумного обоснования мнения.
7. Подбор примеров и задач с учетом возрастных особенностей учащихся.
8. Проведение небольших практических работ и экспериментов для лучшего понимания природы случайной изменчивости и смысла вероятности.
9. Возможность повторения и закрепления.

На наш взгляд, все это должно способствовать усвоению простых, но принципиально новых для учащихся понятий, росту интереса учащихся к математике в целом, формированию современного мировоззрения и умения ориентироваться в изменчивом информационном мире. Подводя итоги, заметим, что предложенный подход к преподаванию элементов статистики и теории вероятностей в школе предполагает естественнонаучное изложение указанных дисциплин. Наибольшую ценность представляют вводимые понятия и система взглядов, а не математический формализм. При таком подходе доказательства отступают на второй план, а математические методы играют ту же роль, что и в физике — роль важного инструмента. Статистика и вероятность в школе должны быть по возможности не перегружены алгебраической техникой, но формировать естественнонаучное представление об окружающем мире.