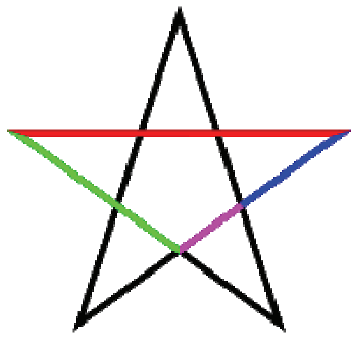
Задания VI заочной интернет-олимпиады
по теории вероятностей и статистике.
МЦНМО, 2013 год

Эссе

Традиционно первые три задания в нашей олимпиаде – эссе. Мы предлагаем провести самостоятельное исследование на заданную тему и прислать нам результаты, наблюдения и гипотезы. Лучшие эссе публикуются. Награждение в конкурсе эссе проводится отдельно от конкурса задач, независимо от возраста автора эссе.

1. Золотое сечение (10 баллов). Число φ (фи) называется «золотым числом» или числом золотого сечения. Золотое сечение разбивает отрезок на две части таким образом, что большая часть относится к меньшей части, как весь отрезок относится к большей части.

Из данного определения следует: $\frac{\varphi}{1}=\frac{1+\varphi}{\varphi}$, откуда $\varphi^2-\varphi-1=0$. Решив уравнение, получаем: $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618$.



Последовательность Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ldots$$

связана с золотым сечением – в ней отношение каждого члена к предыдущему приближается к φ. Золотое сечение легко увидеть в правильной пятиконечной звезде — точка пересечения двух отрезков разбивает каждый из них в золотом отношении.

Считается, что золотое сечение играет важную роль в природе и искусстве. Многие полагают, что древние мастера создавали свои гармоничные произведения, используя число φ и его степени. Например, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют о том, что египетские мастера пользовались золотым сечением. В фасаде древнегреческого храма Парфенона также присутствуют золотые пропорции. Лука Пачоли, современник и друг Леонардо да Винчи, называл это отношение «божественной пропорцией». Сам Леонардо да Винчи нашел в человеческом теле множество отношений $\varphi,\varphi^2,\varphi^3$ и т.д. Начиная с Леонардо да Винчи, многие художники сознательно использовали пропорции «золотого сечения». Московский архитектор Жолтовский также использовал золотое сечение в своих проектах.

Известно, что Сергей Эйзенштейн искусственно построил фильм «Броненосец Потёмкин» по правилам золотого сечения, разбив ленту на пять частей (в первых трёх действие развивается на корабле, в двух последних — в Одессе), причем граница между третьей и четвертой частью в точке золотого сечения. Утверждается даже, что композиция некоторых произведений А.С.Пушкина и Л.Н.Толстого использует золотые точки.

Термин «золотое сечение» был введён Мартином Омом в 1835 году.

В связи с чудесными свойствами золотого сечения возникло множество утверждений о том, что человеческому глазу золотые пропорции симпатичнее других, что человек подсознательно выбирает среди всех пропорций золотые как наиболее привлекательные и т.п.

Однако есть также основания считать, что значимость золотого сечения в искусстве преувеличена и базируется на ошибках и мифах. Например, при обсуждении оптимальных соотношений сторон прямоугольников (форма листов бумаги, фотографий, телевизионных экранов) были испытаны разные варианты. Оказалось, что большинство людей считает прямоугольники, у которых длина больше ширины в φ раз «слишком вытянутыми».

Мы предлагаем Вам провести самостоятельное исследование, цель которого — дать аргументы за или против мнения о том, что «золотое сечение — сечение гармонии, приятное глазу». Мы не ограничимся одним экспериментом, а поставим три эксперимента.

1. Выбор формы для блокнота.
2. Разбиение отрезка на две части.
3. Выбор разбиения прямоугольника (дверцы для шкафа).

В первом тесте золотое сечение – отношение двух сторон прямоугольника. Во втором и третьем тестах золотое сечение используется иначе — как разбиение отрезка или прямоугольника по высоте.

Для проведения исследования Вам потребуется скачать файл тестов, распечатать его, разрезать по пунктирным линиям на карточки и предложить родителям, друзьям и соседям пройти эти тесты. Запомните:

1. Каждый человек (респондент) проходит тест **только один раз**.
2. Каждый человек проходит тест **самостоятельно**, опираясь только на свое мнение.
3. Всего нужно опросить **не менее 30** (а лучше — больше) респондентов.
4. Для каждого **нового респондента придется снова распечатывать** и разрезать тест.

После сбора данных их нужно обработать. Каждый тест обрабатывается своим способом и по каждому тесту делаются свои выводы.

Ссылки на файл с тестами и файл с правилами и примерами обработки размещены на странице олимпиады.

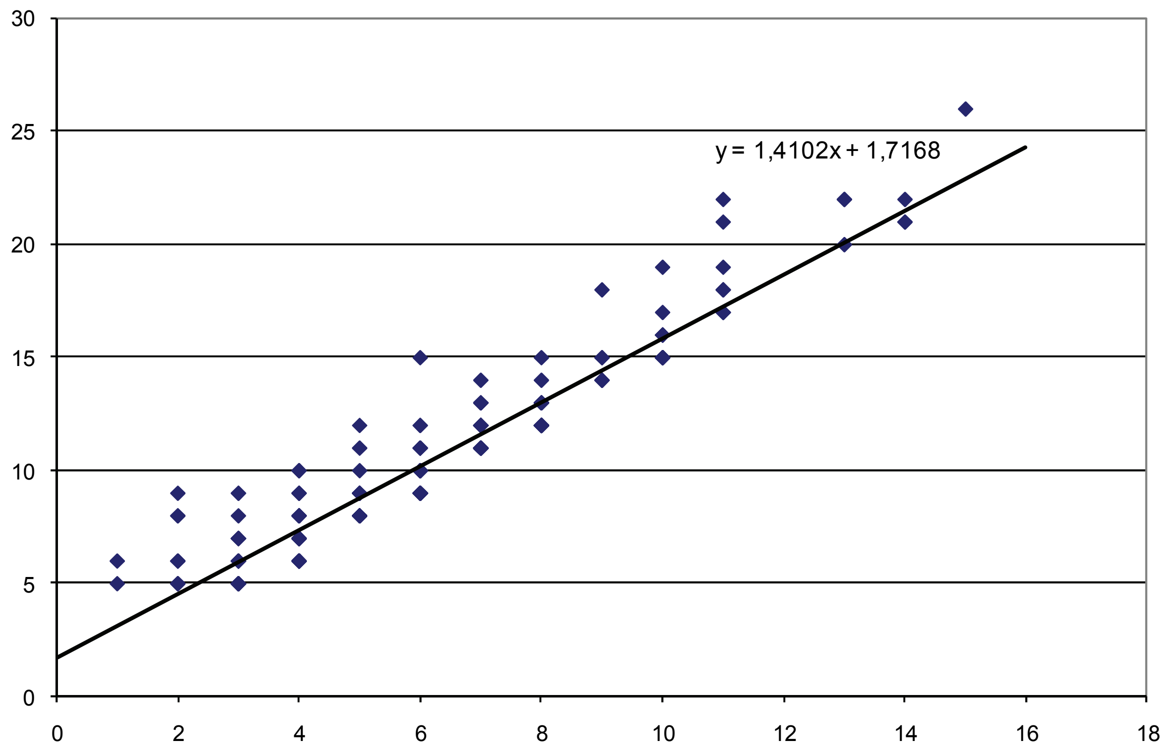
Как и какие выводы можно сделать — Вам подскажут Ваши знания, фантазия и статистическая интуиция.

Ждем результатов Ваших исследований!

2. Скорость ветра (10 баллов). Учитель математики Ноибуро Кавасаки из средней школы при университете Цукубы (Токио) увлекается метеорологической статистикой. Со своими школьниками он проводит обработку данных, пользуясь информацией, полученной из архивов метеорологических сайтов, и пытается делать выводы и даже прогнозы.

Однажды Кавасаки-сенсэй решил посмотреть, наблюдается ли линейная зависимость между средней скоростью ветра и скоростью максимальных порывов ветра в одном и том же месте. Для этого он брал данные различных метеостанций, строил диаграммы рассеивания и прямые, наилучшим образом описывающие эти диаграммы. Для построения прямых г-н Кавасаки использовал метод наименьших квадратов.

На рисунке показана одна из таких диаграмм, построенная по данным за несколько недель из архива погоды г.Понта-Делгада (Португалия).



На оси абсцисс откладывается средняя скорость ветра (м/с) за 10-минутный промежуток времени в конце каждого трехчасового периода, на оси ординат — максимальная скорость порыва ветра (м/с) за этот же промежуток.

Затем г-н Кавасаки построил прямую наименьших квадратов, которая служит осью облака рассеивания. Посмотрев на полученное облако и на уравнение прямой, г-н Кавасаки утверждает, что связь, безусловно, есть, и что максимальная скорость ветра в среднем в 1,41 раза превосходит среднюю скорость ветра.

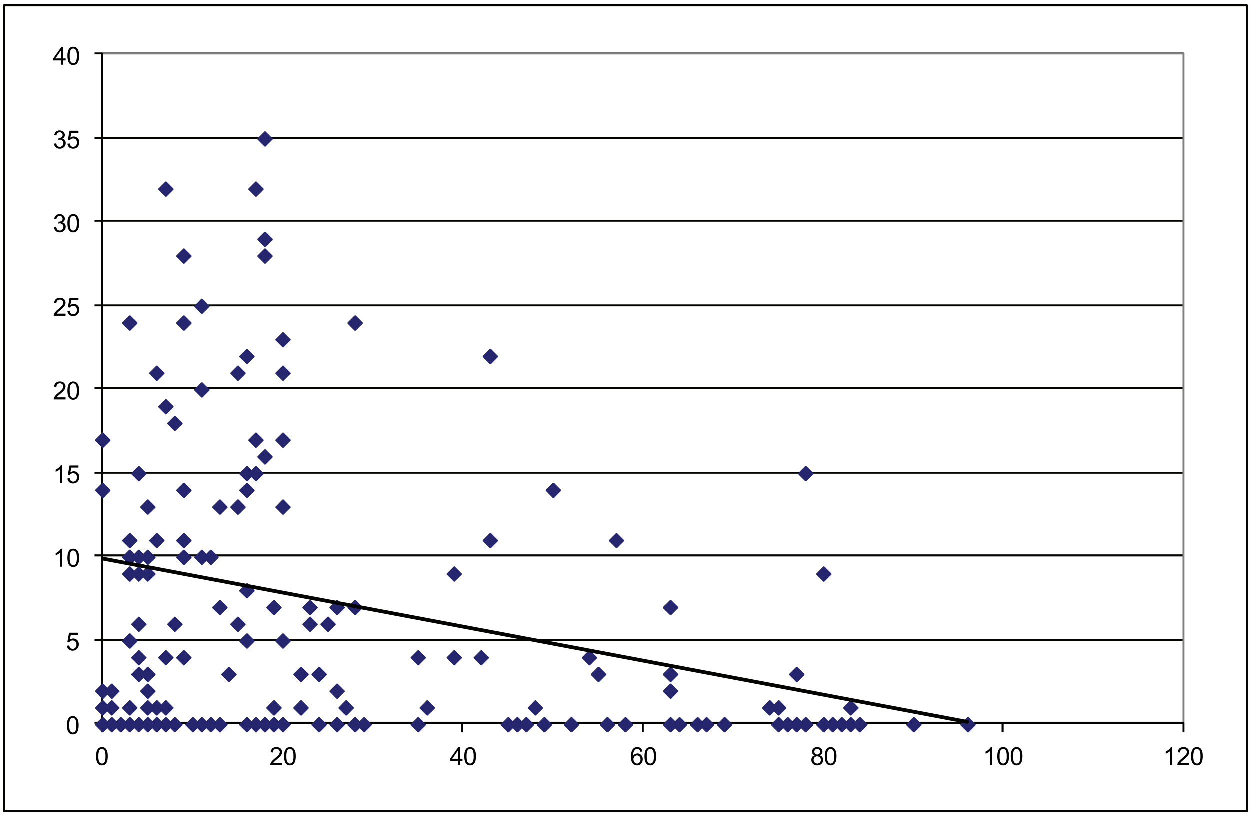
Нет ли ошибки в рассуждениях г-на Ноибуро Кавасаки? Можете ли Вы предложить свои соображения: как подсчитать, во сколько раз максимальная скорость ветра в среднем превосходит среднюю скорость?

3. Влажность воздуха и снег (10 баллов). Одним февральским утром, отворачивая лицо от колючей метели, господин Ноибуро Кавасаки задался вопросом — а как связаны влажность воздуха и количество снега? Чтобы ответить на вопрос, он зашел на сайт метеостанции префектуры Ниигата и нашел данные о влажности нижних слоев воздуха (ниже 2000 м) и верхних слоев воздуха (10000 – 12000 м) за много дней наблюдений. Кроме того, Кавасаки-сенсэй присовокупил к этим данным информацию о толщине снежного покрова, выпавшего в этот день в месте наблюдения.

Влажность верхних слоев атмосферы (φ_B) и нижних слоев атмосферы (φ_H) измеряется в процентах, а толщина снежного покрова (H) в миллиметрах выпавшего снега.

Вот что получилось, когда г-н Кавасаки составил диаграммы рассеивания.

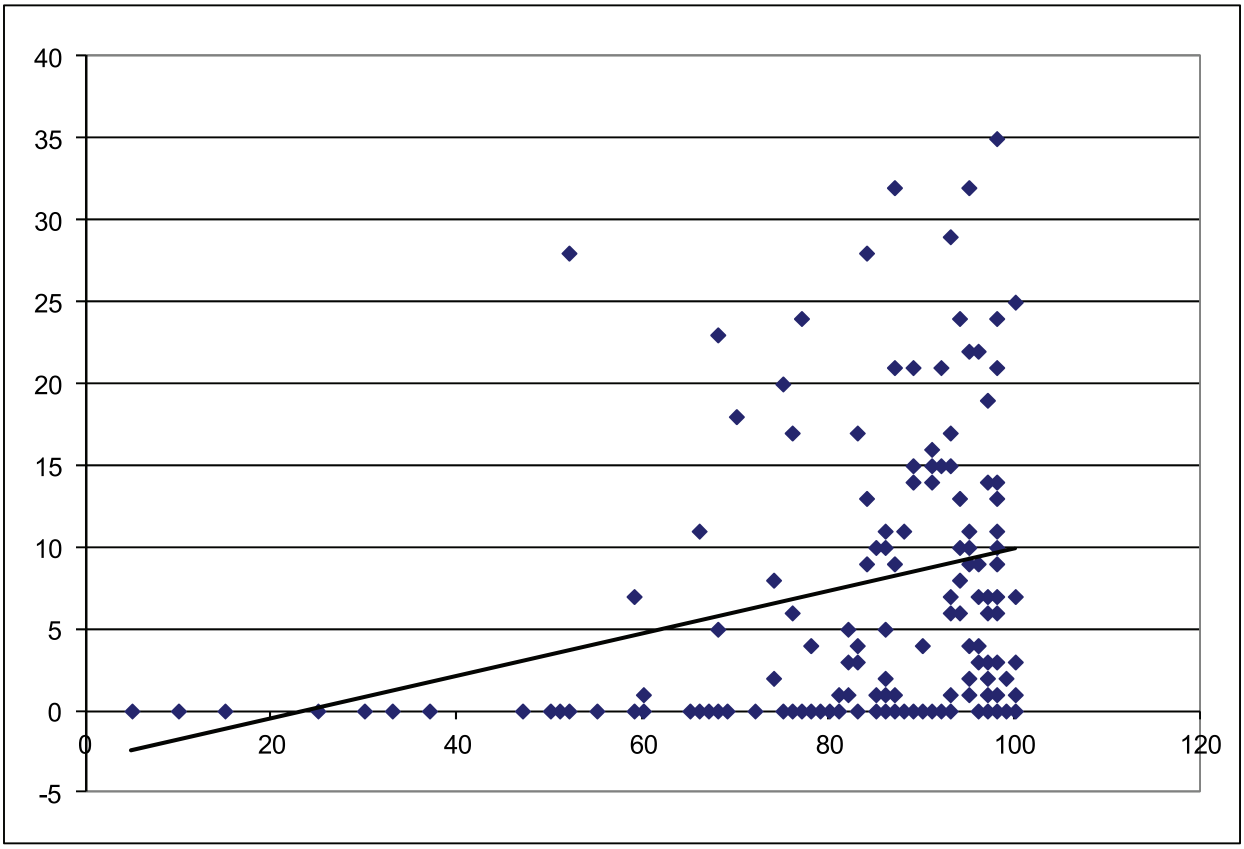
Диаграмма $\varphi_B - H$



Кавасаки-сенсэй рассчитал коэффициент линейной корреляции Пирсона. Получилось $r_{\varphi_B,H} = -0,24$. После некоторых раздумий г-н Кавасаки написал: «Имеется отрицательная корреляция. Значение коэффициента корреляции приблизительно $-0,24$. Абсолютное значение не так велико, я думаю. Однако если верхние слои воздуха сухие, то выпадает много снега».

Затем точно так же, г-н Кавасаки и его ученики построили диаграмму рассеивания для влажности нижних слоев воздуха и количества снега.

Диаграмма $\varphi_H - H$



Коэффициент линейной корреляции Пирсона оказался в этом случае равен $r_{\varphi_B, H} = 0,28$. Г-н Кавасаки так прокомментировал результат: «Аналогично, здесь имеется слабая положительная корреляция. Значение коэффициента корреляции приблизительно $0,28$. Полагаю, и это абсолютное значение не слишком велико. Однако если верхние слои воздуха влажные, то выпадает много снега».

Рассмотрите полученные диаграммы. Попробуйте найти соответствующие данные в архивах сайтов метеонаблюдений (accuwheather.com, rp5.ru и т.д.). Постройте свои диаграммы по наблюдениям данных величин. Разберитесь в том, что представляет собой коэффициент корреляции Пирсона и что он показывает. Подумайте, нет ли ошибок в действиях и рассуждениях господина Ноибуро Кавасаки. Напишите в коротком эссе, что Вы думаете по этому поводу. Вдруг у Вас появятся собственные мысли о том, как лучше интерпретировать полученные данные о влажности воздуха и снегообразовании.

Задачи

Этот раздел традиционно содержит 16 заданий. Около каждой задачи указано, для каких классов мы ее рекомендуем, хотя наши рекомендации очень приблизительны. Решать задачи не возбраняется никому. Оцениваются отдельно работы учащихся 6 — 7, 8 — 9 и 10 — 11 классов.

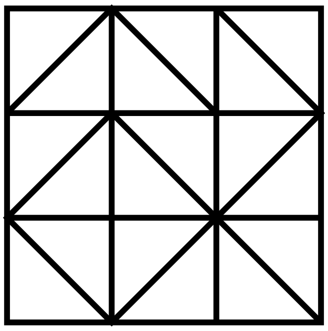
4. Министры в Анчурии (6 – 11 классы, 1 балл). В правительстве кабинете министров Анчурии 100 министров. Среди них есть жулики и честные министры. Известно, что из любых десяти министров, по крайней мере, один министр — жулик. Какое наименьшее число министров-жуликов может быть в кабинете?

5. Случайное блуждание точки. Точка выходит из начала координат на прямой и делает a шагов на единицу вправо, b шагов на единицу влево в каком-то порядке, причём $a > b$. Размахом блуждания точки назовём разность между наибольшей и наименьшей координатами точки за всё время блуждания.

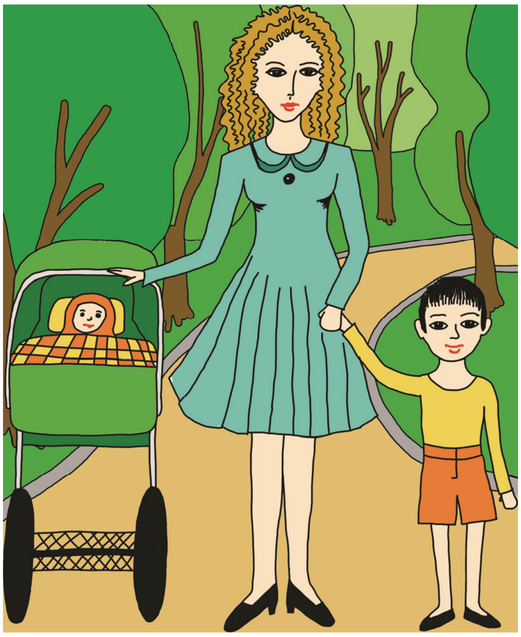
а) (6 – 11 классы, 1 балл) Найдите наибольший возможный размах блуждания.

б) (6 – 11 классы, 1 балл) Найдите наименьший возможный размах.

в) (6 – 11 классы, 1 балл) Сколько существует различных последовательностей движения точки, при которых размах блуждания будет наибольшим возможным?



6. Закраска квадрата (7 – 11 классы, 1 балл). Квадрат разбит на треугольники (см. рисунок). Сколько существует способов закрасить ровно треть квадрата? Маленькие треугольники нельзя красить частично.



7. Мальчик и девочка. Будем считать, что рождение девочки и мальчика равновероятны. Известно, что в некоторой семье двое детей.

а) (6 – 11 классы, 1 балл) Какова вероятность того, что из них один мальчик и одна девочка?

б) (7 – 11 классы, 1 балл) Дополнительно известно, что один из детей — мальчик. Какова теперь вероятность того, что в семье один мальчик и одна девочка?

в) (7 – 11 классы, 2 балла) Дополнительно известно, что мальчик родился в понедельник. Какова теперь вероятность того, что в семье один мальчик и одна девочка?

8. Оплата электричества. На рисунке показано платежное поручение на оплату электричества некоторой энергосбытовой компании.

Получатель платежа ОАО [illegible]

Код РР

Период: Март 2013 г.

Номер лицевого счета [illegible]

Ф.И.О.: [illegible]

Адрес: [illegible]

Код платежа	Тарифная зона	Показания счетчика		Расход факт.	Тариф (руб.)	Сумма к оплате (руб.)
		Текущее	Предыдущее			
13	***пик (Т1)***	1347	1270	77.0	**4,03**	310,31
2	***ночь (Т2)***	1402	1337	65.0	**1,01**	65,65
15	***п/пик (Т3)***	1298	1214	84.0	**3,39**	284,76

Подпись абонента: ***Итого к оплате:*** **660** *р.* **72** *к.*

Каждый месяц клиент передаёт компании показания трёхтарифного счётчика, установленного в квартире. Из показаний за текущий месяц вычитаются соответствующие показания за прошлый месяц, и получается фактический расход за месяц по каждой из трёх тарифных зон (пик, ночь, полупик). Затем расход по каждой зоне умножается на цену одного киловатт-часа в этой зоне. Складывая полученные суммы, клиент получает общую сумму оплаты за месяц. В данном примере клиент заплатит 660 р.72 коп.

Компания тоже ведет учёт расхода и оплаты электроэнергии, пользуясь данными, полученными от клиента. Проблема состоит в том, что компания иногда путает полученные шесть чисел, переставляя их произвольном порядке, правда, следит за тем, текущее показание оставалось больше, чем предыдущее. В результате расчёт компании может оказаться ошибочным. Если компания считает, что клиент должен больше, чем он заплатил, компания требует доплатить разность.

Пользуясь данными изображенной квитанции, найдите:

а) (6 – 11 классы, 1 балл) максимально возможную сумму доплаты за март 2013 года, которую компания потребует у клиента;

б) (8 – 11 классы, 3 балла) математическое ожидание разности между суммой, которую насчитает компания, и суммой, которую заплатил клиент.

9. Патрик и тапочки (8 – 11 классы, 2 балла). Каждый день пёс Патрик сгрызает одну тапочку из имеющегося дома запаса. Строго с вероятностью 0,5 Патрик хочет сгрызть левую тапочку, и с вероятностью 0,5 – правую. Если желаемой тапочки нет, Патрик расстраивается. Сколько пар одинаковых тапочек нужно купить, чтобы с вероятностью не меньше, чем 0,8 Патрик не расстраивался целую неделю (7 дней)?

10. Четное число успехов. Найдите вероятность того, что орёл выпадет чётное число раз, в эксперименте, в котором:

а) (7 – 11 классы, 2 балла) симметричную монету бросают n раз;

б) (8 – 11 классы, 3 балла) n раз бросают монету, у которой вероятность выпадения орла при одном бросании равна p $(0 < p < 1)$.

11. Избирательные округа (7 – 11 классы, 3 балла). В Анчурии готовятся президентские выборы, в которых хочет победить президент Мирафлорес. Ровно половина многочисленных избирателей поддерживает Мирафлореса, а другая половина — Дика Малони. Мирафлорес тоже является избирателем. По закону он имеет право поделить всех избирателей на два избирательных округа по своему усмотрению. В каждом из округов голосование проводится следующим образом: каждый избиратель отмечает на бюллетене имя своего кандидата; все бюллетени помещаются в урну. Затем из урны достаётся один случайный бюллетень, и тот, чьё имя на нём отмечено, победит в этом округе. Кандидат побеждает на выборах, только если победит в обоих округах. Если победитель не выявился, назначается следующий тур голосования по тем же правилам. Как Мирафлорес должен поделить избирателей, чтобы максимизировать вероятность своей победы на первом туре?

12. Гномики и гроза. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других может упасть с вероятностью p. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите:

а) (7 – 11 классы, 2 балла) Вероятность того, что упадёт ровно k гномиков.

б) (9 – 11 классы, 3 балла) Математическое ожидание числа упавших гномиков.

13. Где больше отклонение? (8 – 11 классы, 3 балла). Если симметричную монету бросили n раз, и орёл выпал m раз, то $\frac{m}{n}$ называется *частотой* выпадения орла. Число $\frac{m}{n} - 0,5$ называется *отклонением* частоты от вероятности, а число $\left|\frac{m}{n} - 0,5\right|$ называется *абсолютным отклонением*. Например, если монету бросили 5 раз, и два раза выпал орёл, то отклонение равно $0,4 - 0,5 = -0,1$, а абсолютное отклонение равно $\left|-0,1\right| = 0,1$. Заметим, что отклонение и абсолютное отклонение являются случайными величинами.

Эксперимент состоит из двух частей: сначала монету бросают 10 раз, а потом — 100 раз. В каком из этих случаев больше математическое ожидание абсолютного отклонения частоты выпадения орла от вероятности?

14. Концепция. В Анчурии всего K законов и N министров. Вероятность того, что случайно взятый министр знает случайно выбранный закон, равна p. Однажды министры собрались на совет, чтобы написать Концепцию. Если хотя бы один министр знает закон, то этот закон будет учтён в Концепции, в противном случае этот закон в Концепции учтён не будет. Найдите:

а) (7 – 11 классы, 2 балла) Вероятность того, что ровно M законов будут учтены в Концепции.

б) (8 – 11 классы, 3 балла) Математическое ожидание числа учтённых законов.

15. Двойняшки. Вероятность рождения двойняшек в Швамбрании равна p, тройняшки в Швамбрании не рождаются.

а) (6 – 11 классы, 2 балла) Оцените вероятность того, что случайно встреченный на улице швамбранец — один из пары двойняшек?

б) (8 – 11 классы, 2 балла) В некоторой швамбранской семье трое детей. Какова вероятность того, что среди них есть пара двойняшек?

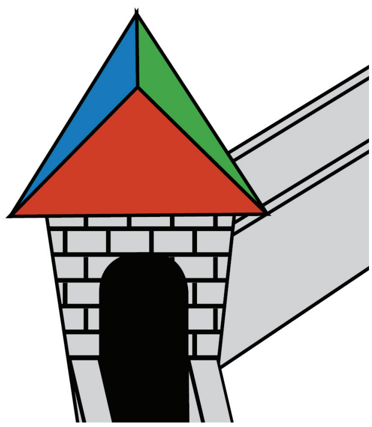
в) (8 – 11 классы, 3 балл) В школах швамбранских двойняшек обязательно зачисляют в один класс. Всего в Швамбрании N первоклассников. Каково математическое ожидание числа пар двойняшек среди них?

16. Дисперсия числа совпадений. На столе разложена колода игральных карт (например, в ряд). Поверх каждой карты положили карту другой колоды. Некоторые карты, возможно, совпали. Найдите:

а) (8 – 11 классы, 3 балла) математическое ожидание числа совпадений;

б) (8 – 11 классы, 4 балла) дисперсию числа совпадений.

17. Трехскатная крыша (10 – 11 классы, 3 балла). Башня в замке короля Артура увенчана крышей, которая представляет собой треугольную пирамиду, у которой все плоские углы при вершине — прямые. Три ската крыши покрашены в разные цвета. Красный скат крыши наклонен к горизонтали под углом α, а синий — под углом β. Найдите вероятность того, что дождевая капля, вертикально упавшая на крышу в случайном месте, упала на зеленый скат.



18. Очередь в банке. Если один человек тратит в очереди одну минуту на ожидание, будем говорить, что бесцельно затрачена одна человеко-минута. В очереди в банке стоит восемь человек, из них пятеро планируют простые операции, занимающие 1 минуту, а остальные планируют длительные операции, занимающие 5 минут. Найдите:

а) (6 – 11 классы, 3 балла) наименьшее и наибольшее возможное суммарное количество бесцельно затраченных человеко-минут;

б) (9 – 11 классы, 4 балла) математическое ожидание количества бесцельно затраченных человеко-минут, при условии, что клиенты встают в очередь в случайном порядке.

19. Замена фонарей. Вдоль дороги стоит 9 фонарей. Если перегорел один из них, а соседние светят, то дорожная служба не беспокоится. Но если перегорают два фонаря подряд, то дорожная служба сразу меняет все перегоревшие фонари. Каждый фонарь перегорает независимо от других.

а) (8 – 11 классы, 5 баллов) Найдите вероятность того, что при очередной замене придется поменять ровно 4 фонаря.

б) (8 – 11 классы, 3 балла) Найдите математическое ожидание числа фонарей, которые придется поменять при очередной замене.