Апелляция

Апелляция по основному туру проводится по электронной почте с 28 января по 11 февраля 2023 г. включительно. Срок может быть сдвинут, если участников будет много. Форма апелляции будет размещена на странице основного тура. *Оргкомитет прекратит переписку по поводу апелляций после 11 февраля,* независимо от того, все ли вопросы выяснены. При наличии разногласий просим уложиться в срок.

Эссе

Лучшие эссе и обсуждение эссе будут опубликованы после проверки

Решения задач

4. Экстремальный набор (от 6 класса, 1 балл). Из цифр от 1 до 9 составлены три однозначных и три двузначных числа, причем цифры не повторяются. Найдите наименьшее возможное среднее арифметическое получившегося набора чисел.

Решение. Пусть сумма первых цифр двузначных чисел равна n, а сумма остальных цифр равна k. Тогда среднее арифметическое равно $\frac{10n+k}{6}$, и это число будет наименьшим, только если в сумму n входят цифры 1, 2 и 3, а в сумму k – цифры от 4 до 9, причем не важно, в каком порядке. Тогда $\frac{10n+k}{6}=\frac{60+39}{6}=16,5$.

Ответ: 16,5.

5. Арифметическая плотность. Понятно, что если взять случайное натуральное число из достаточно длинного отрезка натурального ряда, то вероятность того, что это число будет делиться на 10, будет тем ближе к 0,1, чем длиннее отрезок.

Поставим другой вопрос: насколько сильно эта вероятность может отличаться от 0,1? Она может быть равна 0, если, например, мы задали отрезок $1, 2, 3$, где ни одно число не делится на 10. А какова:

а) (рек. от 6 класса, 1 балл) наибольшая возможная вероятность;

б) (рек. от 6 класса, 1 балл) минимально возможная ненулевая вероятность?

Решение. а) Наибольшая вероятность равна 1. Для этого достаточно взять в качестве отрезка единственное число 10.

б) Пусть во взятом отрезке $k \geq 1$ чисел, кратных 10. Наибольшая длина такого отрезка $10k+9$. Значит, наименьшая вероятность события «*выбранное число делится на 10*» равна

$$p=\frac{k}{10k+9}=\frac{1}{10}-\frac{9}{10(10k+9)}.$$

Наименьшее значение достигается при наименьшем k, т.е. при $k=1$. Получаем: $p=\frac{1}{19}$.

Ответ: 1/19.

6. Средний вес (рек. от 6 класса, 2 балла) В классе меньше, чем 35 учеников. Средний вес всех учеников равен 53,5 кг. Средний вес девочек 47 кг, а средний вес мальчиков — 60 кг. Может ли оказаться так, что самый легкий ученик в этом классе – мальчик, а самый тяжелый – девочка? Приведите пример, либо объясните, почему это невозможно.

Решение. Такое может быть. Пример: 15 мальчиков по 61 кг, 15 девочек по 46 кг, один мальчик весом 45 кг и одна девочка весом 62 кг. Средний вес мальчиков $\frac{15\cdot 61+45}{16}=60$ кг, средний вес девочек $\frac{15\cdot 46+62}{16}=47$ кг, а общий средний вес 53,5 кг, поскольку мальчиков и девочек поровну. Пример не единственный возможный.

7. Три прокола. На каменистой дороге Рассеянный Ученый проколол колесо автомобиля сразу в трех совершенно случайных и независимых точках. Серьезный ремонт невозможен, но, к счастью, в багажнике нашлась старая довольно рваная колесная камера. Ученый сумел вырезать из нее большой неповрежденный кусок, которым можно накрыть пробитую шину изнутри на 2/3 ее длины или даже чуть больше.

а) (рек. от 6 класса, 1 балл). Докажите, что Ученый сможет разместить вырезанный кусок камеры внутри шины так, что все три прокола будут закрыты.

б) (рек. от 9 класса, 5 баллов). Какова вероятность того, что шину можно разделить на три равные по длине части, на каждой из которых будет ровно один прокол?

Решение. Будем для простоты воображать, что шина – это окружность длины 3, а проколы – случайные точки на этой окружности. Случаем, когда два прокола попадают в одну и ту же точку, можно пренебречь, поскольку вероятность такого события равна нулю.

а) Обязательно найдутся две точки из трех, дуга между которыми не меньше, чем 1 (иначе полная дуга окружности окажется меньше, чем 3). Значит, дуга, дополнительная к этой, включает все три точки и имеет длину не больше чем 2. □

б) Чтобы не разбирать запутанные случаи, когда какая-нибудь точка приходится на границу соседних дуг, будем считать, что дуги *полуоткрытые*, то есть каждая дуга содержит один конец и не содержит другой. Например, может быть дуга $[XY)$ с открытым концом Y (в порядке обхода против часовой стрелки) и может быть дуга $(ZT]$ с открытым началом Z (рис. 1).

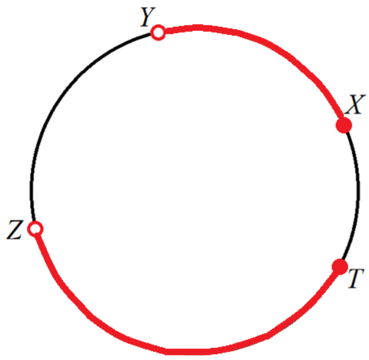

Рис. 1.

Круговым расстоянием между двумя точками на окружности будем называть длину ограниченной ими дуги, которая не содержит третью точку.

Докажем вспомогательное утверждение: разбиение окружности длины 3 на три единичные дуги, содержащие по одной из трех данных точек, *существует* тогда и только тогда, когда круговое расстояние между *любыми* двумя точками меньше, чем 2.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: если окружность удалось разбить на три дуги так, что в каждой ровно одна из трех данных точек, то любые две точки содержатся в объединении двух соседних дуг, то есть в дуге длиной 2.

Докажем обратное утверждение. Пусть на окружности взяты три точки A, B и C, и пусть круговое расстояние между любыми двумя точками из них меньше чем 2. Покажем, что существует разбиение окружности на три единичные дуги, каждая из которых содержит ровно одну точку.

Найдутся две точки (скажем, A и B), расстояние между которыми не меньше, чем 1. Накроем окружность единичными дугами двумя способами.

Первый способ. Три единичные дуги с открытым концом, начиная с точки A против часовой стрелки (см. рис. 2 а). Дуга $[AD)$ содержит только точку A, дуга $[DE)$ содержит точку B, и есть еще дуга $[EA)$.

Второй способ. Три единичные дуги с открытым началом, начиная с точки B по часовой стрелке (рис. 2 б). Дуга $(MB]$ содержит только точку B, дуга $(NM]$ содержит точку A, и есть еще дуга $(BN]$.

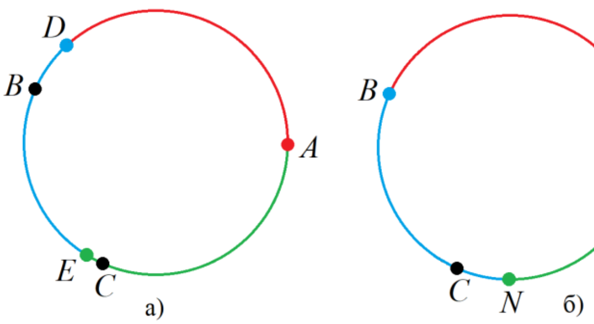

Рис. 2.

Точка C находится на дуге BA, то есть принадлежит объединению дуг $(BN]$ и $[EA)$. Поэтому она принадлежит хотя бы одной из этих дуг. Если точка C принадлежит только дуге $[EA)$, то в качестве искомого разбиения нужно взять первое. Если C принадлежит только дуге $(BN]$, то второе. Если точка C принадлежит обеим дугам (как на рис. 2), то оба разбиения удовлетворяют условию. В любом случае нужное разбиение окружности нашлось. □

Утверждение доказано, и теперь задача стала несложной. Введем на окружности начало отсчета и будем считать, что первый прокол в точке 0, второй – в точке $x > 0$, а третий – в точке $y > x$ $(y < 3)$. Таким образом, получаем опыт, в котором случайная точка $(x; y)$ выбирается из треугольника F, определенного условиями $0 < x < y < 3$ (выделен зеленым цветом на рис. 3).

Событие G «*существует разбиение на три дуги длиной 1, внутри каждой из которых ровно одна точка*» эквивалентно событию «*круговое расстояние между любыми двумя точками меньше, чем 2*», а оно определяется системой

$$G:\begin{cases} x < 2, \\ y - x < 2, \\ 3 - y < 2, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x < 2, \\ y < x + 2, \\ y > 1. \end{cases}$$

Событие G является 6-угольником внутри треугольника F. Следовательно, $\mathrm{P}(A) = \frac{S_A}{S_F} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

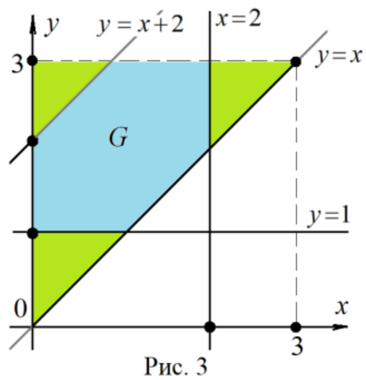

Рис. 3

Ответ: 2/3.

8. Разноцветные ленточки (от 6 класса, 3 балла). У Вали в шкатулке лежали пять разноцветных ленточек длиной 15, 20, 24, 26 и 30 см. Коля отрезал от некоторых (возможно, от всех) ленточек по кусочку. Средняя длина ленточек уменьшилось на 5 см, а медиана и размах длин не изменились. Чему теперь равны длины ленточек?

Решение. Пусть после Колиного поступка самая короткая ленточка имеет длину x см. Тогда длина самой длинной ленточки $x+15$ см, ведь размах не изменился. Еще одна ленточка имеет длину 24 см, поскольку медиана осталась прежней, а две неизвестные длины обозначим y см и z см, и пусть $y \le z$ для определенности. Получается цепочка неравенств

$$x \le y \le 24 \le z \le x+15.$$

Из неравенства $24 \le x+15$ следует, что $x \ge 9$, а потому $y \ge 9$.

Из того, что среднее арифметическое уменьшилось на 5, получаем равенство

$$\frac{x+y+24+z+x+15}{5}+5=\frac{15+20+24+26+30}{5},$$

откуда $2x+y+z=51$.

Если $x=y=9$, то $z=51-2x-y=24$. Если хотя бы одно из чисел x или y больше чем 9, то $z<24$, а это невозможно.

Следовательно, $x=y=9$, $z=24$. Теперь длины ленточек 9, 9, 24, 24 и 24 см.

Ответ: 9, 9, 24, 24 и 24 см.

9. Мини-турнир (рек. от 7 класса, 1 балл). Алеша, Боря и Вася проводят между собой мини-турнир по теннису: каждый играет с каждым один раз. Выигравший получает 1 очко, проигравший 0, ничьих в теннисе не бывает. Абсолютным победителем мини-турнира объявляется тот, у кого в сумме 2 очка. Известно, что Алеша выигрывает у Бори с вероятностью 0,6, а Боря у Васи – с вероятностью 0,4. Какова вероятность события C «*абсолютного победителя не будет*»?

Решение. Событие «X выиграл у Y» обозначим $X \square\ Y$. Событие «*победителя нет*» наступит, только если у всех по одному очку. Это может случиться в двух случаях:

$$A\square\ Б\square\ В\square\ A \text{ и } В\square\ Б\square\ A\square\ В.$$

Неизвестную вероятность события $В\square\ A$ обозначим x. Тогда

$$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}\left(A\square\ Б\square\ В\square\ A\right)+\mathrm{P}\left(В\square\ Б\square\ A\square\ В\right)=0,6\cdot 0,4\cdot x+(1-0,4)(1-0,6)(1-x)=0,24.$$

Ответ: 0,24.

10. Тезки (рек. от 7 класса, 1 балл) Будем считать, что среди восьмиклассников имя Александр встречается в три раза чаще, чем имя Александра, Евгениев втрое меньше, чем Евгений, Валентинов в полтора раза больше, чем Валентин, а Василиев в 49 раз больше, чем Василис. Однажды совершенно случайно выбранная четверка восьмиклассников, про которых мы знаем только, что их зовут Саша, Женя, Валя и Вася, бросали жребий. Найдите вероятность того, что жребий выиграла восьмиклассница, а не восьмиклассник.

Решение.

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{50}=0,355.$$

Ответ: 0,355.

11. Волшебная ручка (рек. от 8 класса, 1 балл). Катя верно решает пример с вероятностью 4/5, а волшебная ручка верно решает пример без помощи Кати с вероятностью 1/2. В контрольной работе 20 примеров, и на четверку достаточно правильно решить 13 из них. Сколько Кате нужно решить примеров самостоятельно, а сколько доверить волшебной ручке, чтобы математическое ожидание числа правильных ответов было не меньше 13?

Решение. Пусть x примеров Катя решает сама, а $20-x$ примеров решает ручка. Тогда математическое ожидание числа правильно решенных задач равно

$$\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}(20-x)=0,3x+10.$$

Из неравенства $0,3x+10\geq 13$ получаем, что $x\geq 10$. Значит, Кате нужно попробовать решить самостоятельно не менее чем 10 примеров.
Ответ: не менее 10 примеров.

12. Ретро-коллекция (рек. от 8 класса, 2 балла). Витя коллекционирует игрушечные автомобили серии «Ретро». Проблема в том, что общее число различных моделей в серии неизвестно – это самый большой коммерческий секрет, но зато известно, что разные автомобили выпускаются одинаковым тиражом, и поэтому можно считать, что все модели распределены равномерно и случайно по разным интернет-магазинам.

На разных сайтах Витя нашел несколько предложений, но при ближайшем рассмотрении выяснилось, что среди предлагаемых машинок только 12 различных. Витя уже почти уверен, что всего машинок только 12 и что дальнейший поиск бесполезен. Но кто знает?

Сколько еще предложений от других магазинов должен рассмотреть Витя, чтобы убедиться в том, что моделей в серии всего 12? Витя считает себя убежденным в чем-то, если вероятность этого события выше, чем 0,99.

Решение. Пусть в серии $n\geq 13$ автомобилей. Вероятность того, что среди k следующих предложений окажутся только те 12 моделей, которые Витя уже видел, равна

$$\left(\frac{12}{n}\right)^k\leq\left(\frac{12}{13}\right)^k.$$

Составим неравенство: $\left(\frac{12}{13}\right)^k<0,01$, откуда

$$k>\log_{12/13}0,01=\frac{\ln 100}{\ln 13-\ln 12}=57,53...$$

Наименьшее целое значение k равно 58.
Ответ: 58.

Комментарий. Найти наименьшее целое решение неравенства можно без логарифмов подбором с помощью калькулятора или компьютера.

13. Юные стрелки. Валя и Коля пошли в тир. Коля предложил:

– Валь, давай стрелять по очереди. Кто первый попадет в мишень, тот и победил.

– Это нечестно! Ты стреляешь лучше. Помнишь, Рассеянный Ученый совершенно точно подсчитал, что на одно попадание ты расходуешь в среднем на один выстрел меньше, чем я.

– Хорошо, – согласился Коля. – Стреляй первой. Тогда у нас будут равные шансы на победу.

Валя немного подумала и сказала:

– Все равно нечестно. Давай лучше возьмем два ружья и будем стрелять одновременно, но по двум разным мишеням. Тогда может случиться ничья, а значит, вероятность того, что я хотя бы не проиграю, больше, чем при стрельбе по очереди.

а) (рек. от 8 класса, 2 балла). Прав ли Коля, утверждая, что если они будут стрелять по очереди, но Валя будет стрелять первой, то шансы у них равны?
б) (рек. от 8 класса, 3 балла). Права ли Валя, утверждая, что если стрелять по двум мишеням одновременно, то вероятность не проиграть у нее больше, чем вероятность победить при стрельбе по очереди?

Решение. Пусть при каждом отдельном выстреле Коля попадает в мишень с вероятностью p, а Валя с вероятностью r. Вероятности неудачных выстрелов у них равны соответственно $q=1-p$ и $s=1-r$.

При стрельбе по очереди вероятность события A «*Валя победит*» (Валя стреляет первой) равна

$$\mathrm{P}(A)=r+sqr+sqsqr+\ldots+(sq)^n r+\ldots=\frac{r}{1-sq}.$$

Согласно расчетам Рассеянного Ученого, $r=\dfrac{1}{x+1}$ и $p=\dfrac{1}{x}$, где x – некоторое положительное число. Тогда $s=\dfrac{x}{x+1}$, $q=\dfrac{x-1}{x}$, а $1-sq=1-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{x+1}:\frac{2}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

Коля прав: при стрельбе по очереди шансы у Вали и Коли равны.

При одновременной стрельбе из двух ружей Валя не проиграет, если победит (событие A) или если наступит ничья (событие B).

$$\mathrm{P}(A)=qr+(qs)qr+(qsqs)qr+\ldots+(qs)^n qr+\ldots=\frac{qr}{1-sq}.$$

$$\mathrm{P}(B)=pr+sqpr+sqsqpr+\ldots+(sq)^n pr=\frac{pr}{1-sq}.$$

Складывая вероятности этих несовместных событий, находим:

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{qr+pr}{1-sq}=\frac{(q+p)r}{1-sq}=\frac{r}{1-sq}.$$

Валя ошибается – стрельба из двух ружей не принесет ей больше шансов, хотя ничья действительно становится возможной, в этом Валя права.
Ответ: Коля прав, Валя нет.

14. Новогодняя задача (рек. от 8 класса, 4 балла). На новогоднем столе в ряд стоят 4 бокала: первый и третий с апельсиновым соком, а второй и четвертый – пустые. В ожидании гостей Валя рассеянно и случайно переливает сок из одного бокала в другой. За один раз она может взять полный бокал и перелить из него все содержимое в какой-нибудь из двух пустых бокалов.

Найдите математическое ожидание числа переливаний, в результате которых первый раз получится все наоборот: первый и третий будут пусты, а второй и четвертый – полны.

Решение. Полные бокалы будем кодировать цифрой 1, а пустые – цифрой 0. Построим граф возможных переливаний (рис. 4). Этот граф оказывается графом октаэдра. Из каждого состояния в любое смежное можно попасть с вероятностью 1/4, причем каждое ребро «проходимо» в обе стороны.

Из начального состояния (1010) в конечное состояние (0101) можно перейти через любое из оставшихся четырех состояний. Отождествим эти четыре промежуточных состояния. Получим более простой граф из трех вершин (рис. 5).

Для краткости обозначим буквами A и C начальное и конечное состояния, все промежуточные изобразим одной вершиной B, не различая их. Ребра сделаем ориентированными, показав все возможные передвижения по графу, кроме ребра $C \to B$, которое нам не нужно, поскольку нас интересует момент первого попадания случайного процесса в вершину C. Около ребер подпишем вероятности соответствующих шагов. Например, вероятность шага $A \to B$ равна 1, а вероятность обратного шага $B \to A$ равна 1/4. Вероятность шага $B \to B$ равна 1/2.

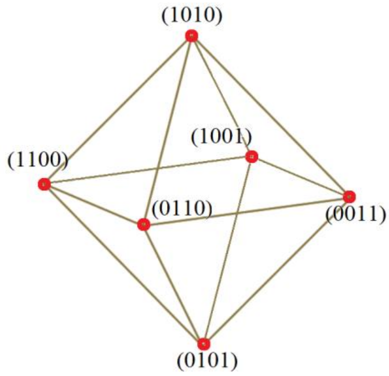

Рис. 4

Пусть X – случайная величина «*число шагов, приводящих из A первый раз в C*», а Y «*число шагов, приводящих из B первый раз в C*».

Ясно, что из A можно попасть только в B, а после этого, чтобы достичь вершины C, потребуется Y шагов. Поэтому

$$X = 1 + Y \tag{1}$$

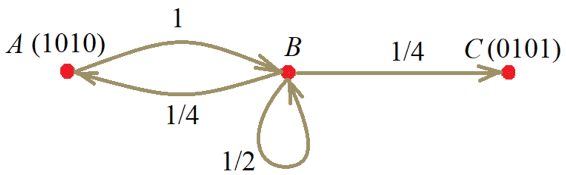

Рис. 5

Выйдя из B, процесс может пойти тремя путями, каждому из которых придумаем индикатор: пусть I_A, I_B и I_C – три случайные величины, каждая из которых равна 1, если из точки B процесс перешел в A, B или C соответственно, и 0 в противном случае.

Если процесс из B попал в исходную точку A, то потрачен один шаг и потребуется еще X_1 шагов, чтобы достичь C, причем величины X и X_1 распределены одинаково. Если процесс из B попал снова в B, то потрачен один шаг, но ничего не изменилось и требуется Y_1 шагов, чтобы достичь C, причем величины Y и Y_1 распределены одинаково. И только в случае перехода в C процесс окончен. Получается равенство

$$Y = I_A(1 + X_1) + I_B(1 + Y_1) + I_C \cdot 1. \tag{2}$$

Индикаторы I_A, I_B и I_C относятся к шагу, который сделан из точки B, а величины X_1 и Y_1 относятся к последующим шагам. Поэтому независимы величины I_A и X_1 и независимы I_B и Y_1. Переходя к математическим ожиданиям в равенствах (1) и (2), получим систему

$$\begin{cases} \mathrm{E}\,X = 1 + \mathrm{E}\,Y, \\ \mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,I_A \cdot (1 + \mathrm{E}\,X_1) + \mathrm{E}\,I_B \cdot (1 + \mathrm{E}\,Y_1) + \mathrm{E}\,I_C. \end{cases}$$

Найдем математические ожидания индикаторов:

$$\mathrm{E}\,I_A = \mathrm{P}(I_A = 1) = \mathrm{P}(B \to A) = \frac{1}{4},\ \mathrm{E}\,I_B = \frac{1}{2} \text{ и } \mathrm{E}\,I_C = \frac{1}{4}.$$

Пусть $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,X_1 = x$ и $\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,Y_1 = y$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x = 1 + y, \\ y = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y, \end{cases} \text{ откуда } x = 6.$$

Ответ: 6.

Комментарий. Решение можно сделать лаконичнее, если использовать свойства условных математических ожиданий.

15. Гонцы (рек. от 9 класса, 3 балла). Однажды прекрасная королева Гвиневра, находясь в родительском замке, попросила короля Артура прислать ей 20 жемчужин. На дорогах неспокойно, и Артур на всякий случай решил послать 40 жемчужин, причем с разными гонцами, велев им скакать по разным дорогам. На пути гонцов могут подстерегать разбойники. Вероятность того, что каждый отдельный гонец будет ограблен, равна p, независимо от выбранной дороги и от судьбы других гонцов $(0<p<1)$.

Король в раздумьях: послать двух гонцов, дав каждому по 20 жемчужин, послать трех гонцов, дав одному 20, а двум по 10 жемчужин, или послать четырех гонцов, дав каждому по 10 жемчужин? Какой вариант следует выбрать королю, чтобы королева с наибольшей вероятностью получила хотя бы 20 жемчужин?

Решение. Вероятность не сохранить хотя бы 20 жемчужин, если гонцов будет двое:

$$\mathrm{P}_2 = p^2.$$

Вероятность не сохранить хотя бы 20 жемчужин, если гонцов трое:

$$\mathrm{P}_3 = p^3 + 2p^2(1-p) = p^2(2-p).$$

Вероятность не сохранить хотя бы 20 жемчужин, если гонцов четверо:

$$\mathrm{P}_4 = p^4 + 4p^3(1-p) = p^3(4-3p).$$

Разделив все вероятности на p^2, получаем три функции:

$$f_2 = 1,\ \ f_3 = 2-p,\ \ f_4 = 4p-3p^2.$$

Очевидно, $f_2 < f_3$ при всех $p \in (0;1)$ (рис. 6), поэтому вариант с тремя гонцами проигрывает при любых условиях. Сравним f_2 и f_4:

$$1 < 4p - 3p^2;\ \ 3p^2 - 4p + 1 < 0, \text{ откуда } \frac{1}{3} < p < 1.$$

Таким образом, при $0 < p < \frac{1}{3}$ выгоднее послать четырех гонцов, а при $\frac{1}{3} \le p < 1$ – двух. На самом деле при $p = \frac{1}{3}$ два или четыре гонца справятся одинаково хорошо, но зачем посылать четырех гонцов, если достаточно двоих?

Ответ: при $0 < p < \frac{1}{3}$ выгоднее послать четырех гонцов, а при $\frac{1}{3} \le p < 1$ – двоих.

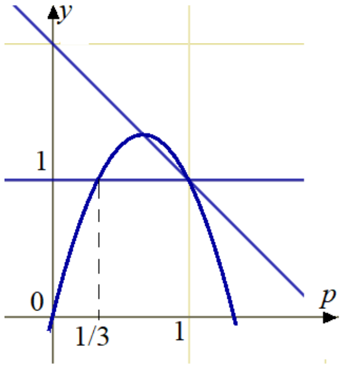

Рис. 6.

16. Технический перерыв (рек. от 9 класса, 3 балла). Женщина, работающая кассиром в железнодорожной кассе, увидела, что перед окошком нет покупателей, вздохнула, повесила объявление «Технический перерыв 15 минут» и ушла ровно на 15 минут. Когда Рассеянный Ученый подошел к кассе, он увидел, что перед ним в очереди уже пять желающих приобрести билет и покорно ждущих, когда окошко откроется. Какова вероятность того, что касса откроется не позже, чем через 3 минуты после прихода Ученого?

Решение. Отсчитывать время будем в минутах от момента ухода кассира. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_5, x_6$ – моменты времени, когда к окошку подошли пять человек до Ученого и сам Ученый. Все эти числа больше нуля, но меньше 15, причем известно, что шестое число больше остальных. Этот факт мы кратко запишем $x_1, x_2, ..., x_5 < x_6$ и будем считать событием B.

При этом условии требуется найти вероятность события $A = (x_6 \geq 12)$. Найдем вероятность противоположного события

$$\mathrm{P}(\bar{A}|B) = \mathrm{P}(\bar{A} \cap B|B) = \mathrm{P}(x_1, ..., x_5, x_6 < 12|B).$$

События $x_1, ..., x_5, x_6 < 12$ «*все шесть чисел меньше чем 12*» и B «*шестое число больше остальных*» независимы, поскольку при условии «*все числа меньше 12*» наибольшим с равными шансами может оказаться любое из них. Поэтому

$$\mathrm{P}(\bar{A}|B) = \mathrm{P}(x_1, ..., x_5, x_6 < 12) = \left(\frac{12}{15}\right)^6 = 0{,}8^6.$$

Искомая вероятность равна $\mathrm{P}(A|B) = 1 - 0{,}8^6 \approx 0{,}738$.

Ответ: $0{,}738$.

17. Капризная принцесса (рек. от 9 класса, 4 балла). Капризная принцесса выбирает жениха. К ней сватается 100 женихов, один другого лучше, и нет средь них двоих равных друг другу. Но только вот сватаются они в случайном порядке. Назовем жениха *видным*, если он нравится принцессе больше всех, кто сватался прежде. Первый по счету жених тоже видный, поскольку перед ним никого не было.

Будем говорить, что видный жених и все последующие, которые сватаются после него, но прежде следующего видного (если он есть), образуют *вереницу* женихов. Найдите математическое ожидание числа женихов в первой веренице.

Решение. Введем индикаторы I_k событий «k*-й жених принадлежит первой веренице*». Это событие эквивалентно событию «1-*й жених лучший среди первых* k *женихов*». Если это событие осуществилось, то $I_k = 1$, а если нет, то $I_k = 0$. Тогда длина первой вереницы X равна сумме всех индикаторов: $X = I_1 + I_2 + ... + I_n$.

Первый жених принадлежит веренице, поэтому $I_1 = 1$. Первый лучше второго с вероятностью $\frac{1}{2}$. Поэтому $\mathrm{E}\, I_2 = \mathrm{P}(I_2 = 1) = \frac{1}{2}$. Первый жених самый лучший среди первых трех с вероятностью $\frac{1}{3}$, поэтому $\mathrm{E}\, I_3 = \mathrm{P}(I_3 = 1) = \frac{1}{3}$. И так далее: $\mathrm{E}\, I_k = \frac{1}{k}$.

Из равенства

$$X = I_1 + I_2 + ... + I_n,$$

переходя к математическому ожиданию, получаем:

$$\mathrm{E}\, X = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Это число называется n*-м гармоническим числом* и обозначается H_n. При $n = 100$ точный расчет дает $H_{100} = 5{,}187...$

Комментарий. Известно, что $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma = 0{,}5772...$ Число γ называется константой Эйлера-Маскерони. Поэтому при достаточно больших n можно считать, что

$$H_n \approx \ln n + 0{,}577.$$

При $n = 100$ расчет по этой формуле дает $H_{100} \approx 5{,}182$.

Ответ: $H_{100} = 5{,}187...$

18. Начальные слова (рек. от 9 класса, 5 баллов). Рассмотрим двоичную последовательность, то есть последовательность нулей и единиц. Назовем $1,k-1$-*словом* фрагмент этой последовательности вида $1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}$, за которым непосредственно следует единица или конец последовательности.

Пример. В последовательности $01000\mathbf{100}101\mathbf{100}$ ровно два $1,2$-слова. Они выделены жирным шрифтом.

Докажите, что во всех бинарных последовательностях длины n, содержащих ровно m единиц, общее количество $1,k-1$-слов равно $m\cdot C_{n-k}^{m-1}$ $(k\le n)$.

Доказательство. Если $m=0$, то утверждение, очевидно, верно, поскольку $1,(k-1)$-слов в этом случае нет.

Если $m=1$, то утверждение также верно, поскольку существует единственная последовательность с одной единицей, оканчивающая фрагментом $1\underbrace{00...0}_{k-1}$.

Обозначим $F(n,m,k)$ общее число $1,(k-1)$-слов в последовательностях длины n, содержащих ровно $m\ge 2$ единиц каждая.

Будем действовать по индукции по n. Если $n=2$, то утверждение верно: в последовательности, состоящей из двух единиц, число единичных $1,0$-слов равно $2\cdot C_1^1=2$.

Предположим, что утверждение верно для некоторого $n=n_0$: $F(n_0,m,k)=mC_{n_0-k}^{m-1}$. Докажем, что оно верно для $n=n_0+1$.

Припишем к каждой последовательности длины $n_0=n-1$ с m единицами число 0 слева. Количество $1,(k-1)$-слов при этом в каждой последовательности не изменится, и общее число $1,(k-1)$-слов во всех таких последовательностях останется равно $F(n_0,m,k)=mC_{n_0-k}^{m-1}$.

Теперь припишем к каждой последовательности длины $n_0=n-1$ с $m-1$ единицей число 1 слева. Если последовательность начиналась ровно с $k-1$ нуля, то количество $1,(k-1)$-слов в этой последовательности увеличится на единицу. В противном случае число $1,(k-1)$-слов останется прежним. Таким образом,

$$F(n,m,k)=F(n-1,m,k)+F(n-1,m-1,k)+a,$$

где $a=C_{n_0-k}^{m-2}=C_{n-1-k}^{m-2}$. Это число бинарных последовательностей длины $n_0=n-1$, в которых ровно $m-1$ единица и которые начинаются ровно с $k-1$ нуля.

Тогда в силу предположения индукции

$$F(n,m,k)=mC_{n-1-k}^{m-1}+(m-1)C_{n-1-k}^{m-2}+C_{n-1-k}^{m-2}=mC_{n-1-k}^{m-1}+mC_{n-1-k}^{m-2}=mC_{n-k}^{m-1}. \square$$

19. Муха на решетке (рек. от 10 класса, 7 баллов). Муха ползет по решетке $n\times n$ из левого нижнего узла A в верхний правый узел B, двигаясь только вправо или вверх. Каково математическое ожидание числа поворотов на траектории мухи, если в каждом узле, где есть ветвление, муха с равными вероятностями выбирает следующий отрезок пути?

Решение. Шаг вверх будем кодировать нулем, шаг вправо – единицей. Тогда путь кодируется последовательностью из n единиц и n нулей. Не будем различать код пути и сам путь.

Назовем путь *восточным*, если он входит в точку B слева направо. Прочие пути будем называть *северными*. На рис. 7 показан восточный путь 01010011 на решетке 4×4.

Каждый восточный путь оканчивается единицей. Обозначим k позицию последнего нуля ($n \le k \le 2n-1$).

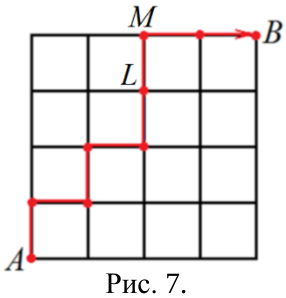

Рис. 7.

$$\overset{\downarrow\, \textit{позиция № } k}{\underbrace{*****\ldots******}_{n-1 \textit{ нулей и } k-n \textit{ единиц}}\,0}11111\ldots1$$

$\uparrow$ *последний поворот*

Рис. 8. Схема восточного пути

Назовем *началом пути* начальную подпоследовательность, которая содержит ровно $n-1$ нулей и $k-n$ единиц. У траектории, показанной на рис. 7, началом пути является участок AL. Всего начало пути содержит $k-2$ пар соседних символов. Вероятность того, что случайная пара имеет вид 01, равна $\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{k-n}{k-2}$. Вероятность пары 10 равна $\frac{k-n}{k-1}\cdot\frac{n-1}{k-2}$, то есть такая же. Таким образом, вероятность того, что пара соседних символов в начале пути кодирует поворот, равна $\frac{2(n-1)(k-n)}{(k-1)(k-2)}$.

Введем индикатор I_j события «*пара соседних символов на позициях* j *и* $j+1$ *кодирует поворот в начале пути*». Здесь $j=1,2,\ldots,k-2$. Математическое ожидание индикатора равно

$$\mathrm{E}\,I_j = \mathrm{P}\left(I_j=1\right) = \frac{2(n-1)(k-n)}{(k-1)(k-2)}.$$

Математическое ожидание числа всех поворотов в начале пути равно сумме ожиданий всех $k-2$ индикаторов:

$$(k-2)\cdot\frac{2(n-1)(k-n)}{(k-1)(k-2)} = \frac{2(n-1)(k-n)}{k-1}.$$

Таким образом, в начале пути в среднем $\frac{2(n-1)(k-n)}{k-1}$ поворотов. Еще один поворот может быть, если на позиции $k-1$ стоит единица. Вероятность этого равна $\frac{k-n}{k-1}$, поэтому математическое ожидание числа поворотов на первоначальном участке длиной k равно

$$\frac{2(n-1)(k-n)}{k-1} + \frac{k-n}{k-1} = \frac{(2n-1)(k-n)}{k-1}.$$

Есть еще последний поворот при выходе на «финишную прямую» MB, но его мы пока не будем учитывать.

Обозначим Y число поворотов на пути без последнего поворота и X – общее число поворотов на всей траектории. Тогда $X=Y+1$. Единица нужна, чтобы учесть последний поворот (01 для восточных путей и 10 для северных).

Вероятность того, что реализуется восточный путь с началом пути длиной $k-1$, то есть с последним нулем на позиции k, равна 2^{-k}, потому что, когда мы проходим такой путь, мы k раз выбираем, идти ли нам вправо или вверх, а потом мы можем идти только вправо, и выбора уже нет. Всего таких путей C_{k-1}^{n-1}. Такова же вероятность северного пути с последней единицей на позиции k, и таких путей тоже C_{k-1}^{n-1}. Таким образом,

$$\mathrm{E}Y = 2\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{C_{k-1}^{n-1}(2n-1)(k-n)}{2^k(k-1)} = 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{C_{k-1}^{n-1}(2n-1)(k-n)}{2^k(k-1)} = 2(2n-1)\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{C_{k-2}^{n-1}}{2^k}.$$

Преобразуем отдельно сумму:

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{C_{k-2}^{n-1}}{2^k} = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{k-2}^{n-1}\cdot 2^{2n-1-k} = \frac{1}{2^{a+2}}\sum_{j=b}^{a}C_j^b\cdot 2^{a-j},$$

где $a=2n-3$ и $b=n-1$. Воспользуемся комбинаторным тождеством (его мы докажем отдельно ниже, поскольку оно не имеет прямого отношения к задаче):

$$\sum_{j=b}^{a}C_j^b\cdot 2^{a-j} = \sum_{j=b+1}^{a+1}C_{a+1}^j,$$

получим:

$$\frac{1}{2^{a+2}}\sum_{j=b+1}^{a+1}C_{a+1}^j = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{j=n}^{2n-2}C_{2n-2}^j.$$

Таким образом,

$$\mathrm{E}X = 1+\mathrm{E}Y = 1+2\cdot(2n-1)\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{j=n}^{2n-2}C_{2n-2}^j = 1+(2n-1)\frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{j=n}^{2n-2}C_{2n-2}^j =$$
$$=1+(2n-1)\frac{1}{2^{2n-2}}\left(2^{2n-3}-\frac{1}{2}C_{2n-2}^{n-1}\right) = n+\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-2}}.$$

Комментарий. Есть более простая, но приближенная формула. Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\mathrm{E}X \approx n+\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2\pi(2n-2)}(2n-2)^{2n-2}\cdot e^{2n-2}}{2^{2n-2}\cdot e^{2n-2}\cdot 2\pi(n-1)(n-1)^{2n-2}} = n+\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2\pi(2n-2)}}{2\pi(n-1)} =$$
$$= n+\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}}.$$

Ответ: $n+\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-2}}$, прибл. $= n+\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}}$.

Доказательство тождества $\sum_{j=b}^{a}C_j^b\cdot 2^{a-j} = \sum_{j=b+1}^{a+1}C_{a+1}^j$.

Воспользуемся математической индукцией. Базис индукции: при $a=b$ обе части равны единице: $C_b^b\cdot 2^0 = C_{b+1}^{b+1}$.

Пусть тождество верно для $a=k\ge b$. Докажем его для $a=k+1$.

$$\sum_{j=b}^{a}C_j^b\cdot 2^{a-j} = \sum_{j=b}^{k+1}C_j^b\cdot 2^{k+1-j} = 2^{k+1-b}C_b^b+2^{k-b}C_{b+1}^b+\ldots+2\cdot C_k^b+1\cdot C_{k+1}^b =$$
$$=2\left(2^{k-b}C_b^b+2^{k-b-1}C_{b+1}^b+\ldots+C_k^b\right)+C_{k+1}^b.$$

По предположению индукции сумма в скобках равна $C_{k+1}^{b+1}+C_{k+1}^{b+2}+\ldots+C_{k+1}^{k+1}$. Следовательно,

$$\sum_{j=b}^{a} C_j^b \cdot 2^{a-j} = 2\left(C_{k+1}^{b+1}+C_{k+1}^{b+2}+\ldots+C_{k+1}^{k+1}\right)+C_{k+1}^{b}=$$

$$=\left(C_{k+1}^{b}+C_{k+1}^{b+1}\right)+\left(C_{k+1}^{b+1}+C_{k+1}^{b+2}\right)+\ldots+\left(C_{k+1}^{k}+C_{k+1}^{k+1}\right)+1=$$

$$=C_{k+2}^{b+1}+C_{k+2}^{b+2}+\ldots+C_{k+2}^{k+1}+C_{k+2}^{k+2}=C_{a+1}^{b+1}+C_{a+1}^{b+2}+\ldots+C_{a+1}^{a}+C_{a+1}^{a+1}=\sum_{j=b+1}^{a+1} C_{a+1}^{j}.\square$$