Лучшие эссе и обсуждение

Традиционно конкурс эссе проводится отдельно от конкурса задач, и баллы за эссе не складываются. Каждое эссе оценивается баллами от 1 (автор прислал хотя бы одно слово) до 10 (полностью раскрыта тема, эссе написано понятным языком, ясно поставлена цель, сформулированы и математически обоснованы выводы).

Жюри выбирает лучшие эссе. Если достойных публикации эссе нет, проводится только разбор. В этом году очень сильных и убедительных эссе на конкурс не поступило. Однако есть неплохие работы. Две из них признаны лучшими. Они опубликованы ниже с корректорской правкой.

1. «К парадоксу дней рождеия» Софьи Петриной: 5 баллов.
2. «Сложный выбор» Вероники Мельниковой: 5 баллов.

Тема 1. К парадоксу дней рождения

Постановка задачи. В одном классе с достаточно большой вероятностью найдутся двое, у кого совпадают дни рождения. Мы предполагаем, что нет близнецов и что дни рождения равномерно распределены по всем 365 дням года. Чем больше класс, тем выше вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двоих. Для 30 человек она достигает 0,706. Однако некоторые люди испытывают сомнения на сей счет. Вот выдержка из статьи Лоренца Клевенсона и Уильяма Уоткинса.

«*Сделанный расчет основан на предположении, что день рождения случайно выбранного человека приходится, скажем, на 1 октября с теми же шансами, с какими на 10 января. Иными словами, на предположении, что* $p_i = \frac{1}{365}$ *для* $i = 1, ..., 365$, *где* p_i *– это вероятность того, что случайно выбранный человек имеет день рождения в i-й день года. Но семьи часто планируют рождение детей, поэтому предположение о равновозможности дней рождения сомнительно. Таким образом, вероятность совпадения в группе из* 30 *человек может быть не* 0,706*. Может ли она быть меньше?*»

Мы предлагаем вам поразмыслить над тем, влияет ли неравномерность распределения дней рождений на вероятность совпадения, и если да, то как.

Эссе Софьи Петриной[1]

Чтобы определить, влияет ли неравномерность распределения вероятностей дней рождения (например, весной люди рождаются чаще, чем осенью) на вероятность совпадения дня рождения в определенной группе, рассмотрим пару отвлечённых примеров.

Очевидно, что если мы возьмем 366 учеников, то вероятность несовпадения дней рождений будет равна 0, так как дни в году закончились и последний ученик обязан повториться и попасть в тот же день, что и один из предыдущих его одноклассников. В нашем первом эксперименте будет 365 учеников.

Посчитаем, какая вероятность, что у всех 365 учеников будут разные даты рождения, если для каждого дня одна и та же вероятность 1/365. Тогда искомая вероятность равна

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{365} = 3,98\cdot 10^{-160}.$$

[1] Приводится с небольшими редакторскими правками.

То есть вероятность того, что хотя бы у двух человек будут одинаковые дни рождения, сильно зависит от количества людей в группе, ведь в исходной задаче было 23 человека, и при такой же формуле вероятность несовпадения была 0,5.

В примере выше вероятность для каждого дня в году равна 1/365. Неравномерность распределения дней рождений будет означать, что у какого-то дня она выше, чем у других, например 2/365. При этом сумма вероятностей, конечно же, равняется 1.

Теперь рассмотрим, как влияет на вероятность несовпадений дня рождения в группе учеников неравномерность вероятности дней рождений в году. Пусть вероятность родиться в какой-то один день, предположим, 1 января, будет 0,6. Для всех остальных дней оставшиеся 40% вероятности распределены равномерно по остальным 364 дням. Рассмотрим случаи, когда первый человек родился 1 января, тогда посчитаем вероятность несовпадения дней рождения в группе из 23 учеников для такого случая:

$$0,6\cdot 0,4\cdot\left(0,4-\frac{0,4}{364}\right)\cdot\left(0,4-\frac{2\cdot 0,4}{364}\right)\cdot\ldots\cdot\left(0,4-\frac{21\cdot 0,4}{364}\right)=5,52\cdot 10^{-10}.$$

По сравнению со случаем, когда вероятность родиться в каждый день равна 1/365, вероятность несовпадения в данном примере уменьшилась. Что логично, т.к. большинство учеников «притягивает» всего 1 день, и чтобы не попасть в него, остаётся меньше шансов.

Теперь рассмотрим крайний случай. Пусть вероятность родиться 1 января будет 0,99, по остальным дням распределен равномерно 1% оставшейся вероятности. Опять же, рассмотрим случай, когда первый человек родился 1 января. Тогда вероятность несовпадения равна

$$0,99\cdot 0,01\cdot\left(0,01-\frac{0,01}{364}\right)\cdot\left(0,01-\frac{2\cdot 0,01}{364}\right)\cdot\ldots\cdot\left(0,01-\frac{21\cdot 0,01}{364}\right)=5,18\cdot 10^{-45}.$$

Вероятность снова уменьшилась.

Из этого мы можем сделать вывод: чем больший вес мы придаем одному дню, тем меньше вероятность того, что в группе не будет людей с одинаковыми днями рождения.

Построим функцию зависимости вероятности отсутствия совпадений дней рождения от веса одного дня. Максимальное значение эта функция достигает, если вероятность этого «особенного» дня 4%.

Комментарий. Рассуждения Софьи понятны: она предполагает, что некоторый день (например, 1 января) – особенный, притягивающий к себе моменты рождения и перегружающий родильные дома. К сожалению, вычисления неполны. Почему-то Софья считает, что при вычислении вероятности отсутствия совпадений достаточно рассмотреть случай, когда первый ученик из 23 родился именно 1 января. Но это не так. 1 января, несмотря на притягательность этого дня, может никто не родиться, а может быть, что родится, но не первый ученик, а какой-то другой. Таким образом, найдена далеко не полная вероятность события «*совпадений нет*». Отсюда, вероятно, странный максимум вблизи вероятности 0,04. Тем не менее, общий ход мыслей Софьи весьма разумен – если среди дней года есть «более притягательные», то вероятность хотя бы одного совпадения не уменьшается, а увеличивается.

***

Полностью эту задачу решили Лоренц Клевенсон и Уильям Уоткинс в 1991 г. Их статья[2] «Majoritation and the Birthday Inequality» довольно подробная, но написана весьма формальным языком. Потому приведем их решение в вольном, сильно укороченном и упрощенном изложении.

Неравенство дней рождения. Вероятность совпадения каких-нибудь дней рождения при равномерном распределении рождений по дням года *меньше*, чем при любом неравномерном.

Будем считать, что в классе ровно k учеников и что все они пронумерованы числами от 1 до k. Пусть p_j – вероятность того, что случайно взятый ученик родился в j-й день года ($j = 1, \ldots, n$, где $n = 365$ для обычного года). Докажем, что если среди вероятностей p_j есть различные, то вероятность события «*совпадение дней рождения есть*» оказывается больше, чем в случае, когда все p_j равны между собой. Перейдем к вероятности Q противоположного события «*совпадений нет*» и докажем утверждение, эквивалентное неравенству дней рождения.

Вероятность Q наибольшая, если все вероятности p_j равны между собой. (1)

Доказательство. Выберем k различных дней года в некотором определенном порядке (не обязательно хронологическом). Получится упорядоченный набор различных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Вероятность того, что одноклассники от 1-го до k-го родились именно в эти дни и именно в таком порядке (первый – в день i_1, второй – в день i_2 и т.д.), равна произведению $p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}$. Значит,

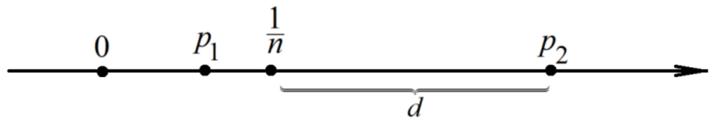
$$Q = \sum p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}\ , \qquad (2)$$

где суммирование ведется по всем возможным порядоченным наборам $i_1, i_2, \ldots, i_k$ различных целых от 1 до n.

Предположим, что не все вероятности p_j равны между собой. Поскольку сумма всех p_j равна 1, среди этих чисел найдутся два, одно из которых меньше, а другое больше, чем $1/n$. Нам все равно, какие это числа, поэтому будем для простоты считать, что это p_1 и p_2, то есть $p_1 < 1/n < p_2$. Обозначим буквой d разность $p_2 - 1/n$.

---

[2] Majorization and the Birthday Inequality. M. Lawrence Clevenson and William Watkins. Mathematics Magazine, Jun., 1991, Vol. 64, No. 3 (Jun., 1991), pp. 183-188, https://www.jstor.org/stable/2691301.



Теперь заменим в сумме (2) числа p_1 и p_2 числами $q_1 = p_1 + d$ и $q_2 = p_2 - d = 1/n$. Назовем такую замену T*-преобразованием*: $T(p_1, p_2, p_3, ...p_n) = (q_1, q_2, p_3, ...p_n)$. Покажем, что при T-преобразовании сумма (2) увеличивается.

В этой сумме три вида слагаемых. Первый вид – слагаемые вообще без множителей p_1 и p_2. Эти слагаемые не изменятся.

Второй вид – слагаемые, которые содержат только множитель p_1 или только p_2, но не оба сразу. Эти слагаемые разбиваются на пары: в каждой паре слагаемые отличаются только этими множителями. Например, если $n = 4$, а $k = 3$, то в сумме (2) есть пара слагаемых $p_1p_3p_4$ и $p_2p_3p_4$, а также пара $p_3p_1p_4$ и $p_3p_2p_4$ и т.д. Произведение всех множителей в каждом таком слагаемом, кроме p_1 и p_2, обозначим a. Тогда сумма пары таких слагаемых равна $p_1a + p_2a$ и она не меняется при T-преобразовании:

$$q_1a + q_2a = (q_1 + q_2)a = (p_1 + d + p_2 - d)a = (p_1 + p_2)a = p_1a + p_2a.$$

Третий вид самый интересный – это слагаемые, где есть оба множителя p_1 и p_2. Рассмотрим какое-нибудь такое слагаемое. Произведение всех прочих множителей, помимо p_1 и p_2, снова обозначим для простоты буквой a. Тогда слагаемое получает вид p_1p_2a. Это слагаемое после T-преобразования станет больше:

$$q_1q_2a = (p_1 + d)(p_2 - d)a = \left(p_1p_2 + d(p_2 - p_1) - d^2\right)a > \left(p_1p_2 + d^2 - d^2\right)a = p_1p_2a,$$

поскольку $p_2 - p_1 > d$.

Подведем итоги. Слагаемые первого вида при T-преобразовании не меняются, сумма слагаемых второго вида не меняется, а слагаемые третьего вида увеличиваются. Значит, увеличивается вся сумма (2).

Но ведь мы можем использовать T-преобразование не только для p_1 и p_2, а для любой подходящей пары вероятностей. Значит, набор неравных вероятностей $p_1, ..., p_n$ можно привести к набору $1/n, 1/n, ..., 1/n$ цепочкой подходящих T-преобразований.

Например, при $n = 4$ набор вероятностей

$$p_1 = 0{,}28,\ p_2 = 0{,}16,\ p_3 = 0{,}41,\ p_4 = 0{,}15$$

последовательно преобразуется следующим образом (на каждом шагу подчеркиваем числа, которые заменяем, и подписываем около стрелочки значение d).

$$\left(\underline{0{,}28},\ \underline{0{,}16},\ 0{,}41,\ 0{,}15\right) \xrightarrow{d=0{,}03} \left(0{,}25,\ \underline{0{,}19},\ \underline{0{,}41},\ 0{,}15\right) \xrightarrow{d=0{,}16}$$

$$\left(0{,}25,\ \underline{0{,}35}, 0{,}25,\ \underline{0{,}15}\right) \xrightarrow{d=0{,}1} \left(0{,}25,\ 0{,}25, 0{,}25, 0{,}25\right).$$

При каждом T-преобразовании количество чисел $1/n$ увеличивается на одно, и, значит, весь процесс потребует не больше, чем $n-1$ T-преобразований. При каждом сумма (2), то есть вероятность Q события «*совпадений нет*» становится больше, значит, она станет наибольшей тогда, когда из исходного набора вероятностей получится набор одинаковых вероятностей $1/n, 1/n, ..., 1/n$.

Утверждение (1) доказано, а из него следует неравенство дней рождения – *неравномерность распределения дней рождения по дням года не уменьшает, а увеличивает вероятность наличия совпадений.*

© Московский центр непрерывного математического образования, 2023

Тема 2. Случайность в архитектуре

Какова роль случайности в современной архитектуре? Часто ли она встречается и служит ли она какой-нибудь определенной цели? Можно ли в этих или других примерах хаотичного дизайна найти закономерности и как они получаются – это замысел архитектора или следствие каких-либо математических законов, которым вынужденно подчиняется случайность?

Может быть, вам тоже встречались случайные орнаменты, хаотичное расположение элементов в архитектурных сооружениях, предметах интерьера, садовом или парковом дизайне. Опишите их, сделайте фото, подумайте над тем, имеет ли случайность какой-либо функциональный смысл, удачны или неудачны эти дизайнерские решения. Может быть, вам удастся сформулировать какие-нибудь общие идеи по этому поводу.

Комментарий. К сожалению, среди присланных сочинений не нашлось ни одного, которое заслуживало бы серьезного внимания. У разных авторов попадались дельные мысли – о единстве функциональности и дизайна, о том, что случайные элементы оформления «оживляют» сооружение и создают «эффект движения», о том, что случайность должна сочетаться с симметрией и т.п. Встретилось категорическое утверждение, что орнамент не может быть случайным (тем самым начисто опровергается существование калейдоскопов). В некоторых работах разочаровывает противопоставление случайности и закономерности. Безусловно, в здании центра «Санкт-Петербург» число золотистых панелей растет по мере удаления от земли, но это не отменяет случайность их расположения, например, на каждом этаже. Случайность не обязана сочетаться с равномерностью.

Главный недостаток всех работ – отсутствие попытки хоть какого-то численного анализа или моделирования. Поэтому в номинации «Случайность в архитектуре» лучшее эссе не выбрано. Возможно, мы еще раз предложим похожую тему, но более настойчиво попросим подкреплять свои мысли рациональными рассуждениями и математическими выкладками. По этой причине мы сейчас здесь не будем обсуждать тему подробно.

Тема 3. Сложный выбор

…чем ближе к натуре, тем лучше, — лекарств дорогих мы не употребляем. Человек простой: если умрет, то и так умрет; если выздоровеет, то и так выздоровеет.

Н.В.Гоголь. Ревизор

В книге Росса Хонсбергера[3] «Математические сливы» (Mathematical Plums) есть не слишком приятный сюжет. Предположим, имеется очень опасное и очень редкое заболевание, от которого без медицинской помощи умирает 50% заболевших. Изобретены два несовместимых лекарства — A и B, которые прошли испытания на двух группах заболевших, но группы очень малочисленные, поскольку, повторим, заболевание крайне редкое.

В первой группе было всего три пациента. Все они принимали лекарство A, и все трое выздоровели. Во второй группе было восемь больных. Они принимали лекарство B, и из них выздоровели семеро. Какое лекарство вы бы предпочли для себя, опираясь только на эти данные?

[3] https://ru.wikipedia.org/wiki/Хонсбергер,_Росс

Эссе Вероники Мельниковой[4]

Так как заболевание *очень редкое*, можно предположить, что статистика смертности заболевших (50 %) определялась по экстремально малой выборке (например, 10 человек), сопоставимой с общим количеством пациентов в группах, где проводились испытания лекарств. Таким образом, исходя из этого предположения, можно допустить, что из общего числа пациентов двух групп (11 заболевших), если бы они не принимали лекарства, пять из них с вероятностью в 100 % выздоровели бы сами по себе, пять с той же вероятностью умерли бы, и еще один пациент с вероятностью 50 % выздоровел или умер бы. Таким образом, с одинаковой вероятностью в 50 % из 11 пациентов:

1) пять пациентов выздоровели бы сами по себе, а шесть умерли бы;
2) шесть пациентов выздоровели бы сами по себе, а пять умерли бы.

Чтобы проверить гипотезу Хонсбергера о том, что лекарства А и В на самом деле не помогают, а все излечившиеся могли выздороветь сами по себе, рассмотрим вариант с наибольшим количеством пациентов (шесть заболевших), которые поправились бы без медицинской помощи.

Так как испытания лекарств проводились на слишком малочисленных группах, следует учитывать вероятность непропорционального распределения заболевших (тех, которые выздоровели бы сами по себе, и тех, которые умерли бы без медицинской помощи, т. е. не принимая лекарство) по группам.

Рассмотрим все возможные варианты распределения 10 выздоровевших и одного умершего пациента по группам. Получим четыре возможных варианта (см. таблицу 1).

Таблица 1. Число пациентов, которые выздоровели бы без медицинской помощи

Первая группа (лекарство А)	Вторая группа (лекарство В)
3	3
2	4
1	5
0	6

Рассчитаем вероятность эффективности лекарств А и В для каждого варианта по формуле $(N_B \cdot 100\ \%) / N$, где N_B – количество выздоровевших пациентов, которые умерли бы без медицинской помощи, N – общее количество пациентов в группе, которые умерли бы без медицинской помощи.

Полученные результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

Эффективность лекарства А, %	Эффективность лекарства В, %
0	80,00
100	75,00
100	66,67
100	50,00

Полученные результаты показывают:

1) лекарство А оказалось эффективным в трех из четырех случаев, при этом в одном из четырех показало нулевой результат;
2) лекарство В помогает от заболевания, хотя и не является достаточно эффективным – средняя эффективность лекарства В составляет 68 %.

Тем не менее разумное предпочтение следует отдать лекарству В, принимая во внимание следующее:

- полученные результаты поддерживают гипотезу Хонсбергера по отношению к лекарству А (в одном из четырех случаев все три пациента выздоровели сами по себе), что не доказывает его эффективность;
- лекарство В проходило испытание на гораздо большем количестве пациентов (в 2,7 раза), чем лекарство А, что существенно увеличивает надежность полученных результатов;

[4] Приводится с редакторской правкой.

- лекарство В не показало нулевого результата во всех рассмотренных вариантах распределения пациентов по группам (т. к. общее количество выздоровевших пациентов, которые принимали лекарство В, превышало количество заболевших, которые по статистике выздоровели бы сами по себе), что опровергает гипотезу Хонсбергера относительно лекарства В.

Таким образом, с большей степенью вероятности можно допустить, что лекарство В может помогать от заболевания, хотя не гарантирует стопроцентный результат, чего мы не можем утверждать о лекарстве А.

Комментарий. Тема про лекарства оказалась очень популярной среди участников олимпиады. Большинство авторов эссе согласилось с Хонсбергером, иногда подкрепляя свои слова вычислениями, проверяющими гипотезы о том, что лекарства на самом деле не оказывают лечебного действия. Действительно, как заметил Хонсбергер, в предположении, что лекарство В не действует, вероятность произошедшего события «*во второй группе выздоровело 7 пациентов*» равна $C_8^1 \frac{1}{2^8} = \frac{1}{32}$. А в предположении, что пустышкой является лекарство А, вероятность события «*в первой группе выздоровели все трое*» равна $\frac{1}{8}$, что в 4 раза больше. Поэтому более вероятно, что лекарство В является действенным, чем то, что лекарство А является действенным.

Но ведь сам Хонсбергер в своем очерке не ставит вопрос о том, какое из лекарств с большей вероятностью является или не является действенным. Вопрос в том, *какое лекарство вы бы предпочли*. То есть нужно оценить эффективность лекарства. А это совсем другой вопрос, который требует совсем другого подхода. Согласитесь, странно оценивать эффективность лекарства, заранее предполагая, что оно неэффективно.

Вероника в своем эссе вплотную подошла к плодотворному рассуждению, но почему-то решила, что из 11 пациентов сами по себе могли выздороветь лишь 6, а во второй группе не меньше чем 3 и не больше, чем 6. Почему было не рассмотреть все возможные случаи, тем более, что их немного? Кроме того, в логике Вероники есть еще один пробел: события «*без лекарства выздоровели бы 3*», «*без лекарства выздоровели бы 4*» и так далее неравновероятны, и это следовало учесть при усреднении процентов.

Попробуем до конца пройти путем, который предложила Вероника.

***

Будем понимать эффективность лекарства как вероятность излечения больного, который без лекарства умер бы.

Оценим эффективность лекарства А. Пусть гипотеза состоит в том, что из трех пациентов группы А без лекарства погибло бы k человек. Вероятность этого $\frac{1}{2^3} C_3^k$. При этой гипотезе эффективность лекарства А оценивается частотой излечения $\frac{k}{k} = 1$, за исключением случая $k = 0$, когда оценить частоту невозможно, а потому ее следует считать неизвестной и равной α, где $0 \le \alpha \le 1$. Таким образом, полная вероятность того, что А поможет тому, кто не выжил бы сам, оценивается величиной

$$\hat{p}_{\text{А}} = \frac{1}{2^3}\left(C_3^0 \alpha + C_3^1 \cdot 1 + C_3^2 \cdot 1 + C_3^2 \cdot 1\right) = \frac{1}{2^3}\left(2^3 - 1 + \alpha\right) = \frac{7+\alpha}{8}.$$

Полученная оценка *не меньше*, чем $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

Аналогично оценим эффективность лекарства В. Пусть гипотеза состоит в том, что из 8 пациентов группы В без лекарства погибло бы k человек. Вероятность этого

$$\frac{C_8^k \frac{1}{2^8}}{1-C_8^0 \frac{1}{2^8}} = \frac{C_8^k}{2^8-1}.$$

Теперь $k \geq 1$, поскольку, известно, что один пациент погиб даже с лекарством (а мы считаем, что оно, по крайней мере, не вредит).

Эффективность лекарства в таком предположении оценивается числом $\frac{k-1}{k}$, поскольку $k-1$ пациентам из k лекарство помогло. Значит, эффективность В, т.е. полная вероятность излечения того, кто не выжил бы сам, оценивается величиной

$$\hat{p}_{\text{В}} = \frac{1}{2^8-1}\sum_{k=1}^{8} C_8^k \frac{k-1}{k} = 0,704701\ldots$$

Лекарство В существенно проигрывает.

***

Можно подойти к задаче, вооружившись *принципом наибольшего правдоподобия*[5]: найдем, при какой эффективности $p_{\text{А}}$ вероятность того, что в первой группе все трое выздоровели, наибольшая. Составим функцию правдоподобия $L_{\text{А}}$:

$$L_{\text{А}}(x) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^3 = \frac{1}{8}(x+1)^3 \to \max \text{ на отрезке } x \in [0;1].$$

Функция возрастающая, поэтому решение $\hat{p}_{\text{А}} = x_{\max} = 1$.

Таким же образом составим функцию правдоподобия для второй группы:

$$L_{\text{В}}(x) = 8 \cdot \frac{1}{2}(1-x) \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^7 = \frac{1}{32}(1-x)(x+1)^7.$$

Наибольшее значение[6] на отрезке $[0;1]$ достигается при $x = 0,75$. Это и есть оценка $p_{\text{В}}$. И опять лекарство В проигрывает.

Полученные *точечные оценки* эффективности для В *существенно* ниже, чем для А. Это обстоятельство, правда опираясь на неполные и несколько ошибочные основания, обнаружила Вероника, но почему-то в конце своего сочинения все же предпочла В. Даже ясно почему: здравый смысл подсказывает, что 8 наблюдений лучше, чем 3, а поэтому случайная погрешность в результатах лечения в группе В ниже, чем в А.

Хотя, если еще подумать, то можно найти, что случайная погрешность в результатах при переходе от выборки объемом 3 к выборке объемом 8 уменьшается не в 2,7 раза, как может показаться, а намного меньше – в самом идеальном случае примерно на 39%. И в обоих случаях погрешность удручающе велика из-за малочисленности выборок. В такой ситуации возникает естественное и почти отчаянное желание довериться точечным оценкам, но тогда следует признать, что А выигрывает. Выбор действительно сложный.

---

[5] Не вдаваясь в подробности скажем, что принцип наибольшего правдоподобия состоит в том, чтобы считать осуществившееся событие весьма вероятным и даже самым вероятным, поскольку нет оснований считать, что в однократном опыте произойдет маловероятное событие.

[6] Найти точку максимума функции $L_{\text{В}}(x)$ можно разными способами.