XV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

Возможные идеи эссе на тему «Странная игра Рекенталера»

Пусть в какой-то момент игрок имеет капитал X, вложенный в игру. При успехе (орел) капитал игрока становится равен $1{,}6X$, а при неудаче – уменьшается на 40%, то есть становится равен $0{,}6X$. Таким образом, математическое ожидание результата одной игры равно

$$\frac{1}{2}\cdot 1{,}6X+\frac{1}{2}\cdot 0{,}6X=1{,}1X.$$

Значит, вложив один доллар, через n бросаний монеты (циклов игры), игрок в среднем будет иметь $1{,}1^n$ долларов, что довольно много. Действительно, уже через 100 циклов, математическое ожидание капитала будет $\$1{,}1^{10}$, то есть 13 780 долларов и 61 цент. Таким образом, ответ на первый вопрос утвердительный – да, при большом числе циклов математическое ожидание выигрыша положительное и большое, поскольку растет в геометрической прогрессии со знаменателем 1,1.

В силу закона больших чисел игроки будут в среднем находиться в выигрыше. И даже один игрок будет обязательно в какие-то моменты игры находиться в выигрыше, поскольку его капитал при увеличении n с большой вероятностью будет близок к $1{,}1^n$ долларам.

Какая доля игроков потеряет почти все деньги за n циклов? Или, если мы говорим об одном игроке, то какова вероятность, что он через n циклов разорится, то есть потеряет все до цента?

Последовательность циклов игры представляет собой серию испытаний Бернулли, и вероятность того, что капитал X_n через n циклов окажется не больше, чем 1 цент (интерпретируем выражение «до цента» буквально), равна

$$\mathrm{P}\left(X_n\le \$0{,}01\right)=\sum_k C_n^k\frac{1}{2^n},\tag{1}$$

где суммирование ведется по всем k, при которых $1{,}6^k\cdot 0{,}6^{n-k}\le 0{,}01$. Найдем эти k. Из неравенства (1) получаем:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^k\le 0{,}01,\text{ откуда}$$

$$k\le\log_{\frac{8}{3}}\left(0{,}01\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)=\left(n\lg\frac{5}{3}-2\right):\lg\frac{8}{3}\approx 0{,}521n-4{,}695.\tag{2}$$

Тогда «граница разорения», то есть наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству (2), равно

$$k_0(n) = \left[\left(n \lg \frac{5}{3} - 2 \right) : \lg \frac{8}{3} \right] > 0{,}52n - 6$$

(квадратные скобки означают взятие целой части).

Зададим некоторую большую вероятность α. Число успешных циклов игры имеет биномиальное распределение, которое обладает тем свойством, что для всех n, начиная с некоторого выполняется неравенство

$$\mathrm{P}\left(X_n \le \$0{,}01\right) = \sum_{k=0}^{k_0(n)} C_n^k \frac{1}{2^n} > \alpha. \qquad (3)$$

Иными словами, при достаточно больших n вероятность разорения оказывается больше, чем любое наперед заданное число $\alpha < 1$. Значит, ответ на вопрос 2 также утвердительный: да, игрок разорится практически наверняка. На рис. 1 показан расчет при $\alpha = 0{,}75$.

=БИНОМРАСП(D5;D3;0,5;1)

B	C	D	E	F
	n0=	**659**		
	ln(5/3)/ln(8/3)*n0=	338,51857		
	k0=	338		
	P(0,...,k0)=	0,75839067	>	alhpa=0,75

Рис. 1

Пояснение к расчету. Если $n = 659$, то с вероятностью 0,7583…, превышающей $\alpha = 0{,}75$, игрок будет иметь капитал не больше 1 цента. Если $n > 659$, то вероятность разорения еще больше[1].

На рис. 2 сделана графическая попытка объяснить происходящее на сглаженной схеме биномиального распределения числа успешных циклов.

[1] Вероятность разорения с ростом n растет не монотонно из-за дискретности биномиального распределения. Более точно можно сказать, что эта вероятность всегда выше некоторой монотонно возрастающей функции, приближающейся к 1 при $n \to \infty$.

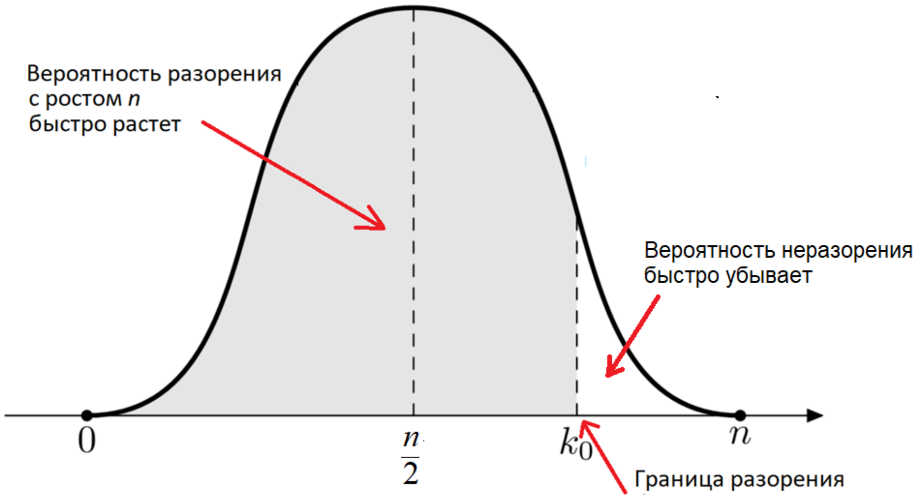

Рис. 2

На рис. 3 схематически показано распределение капитала игрока после n циклов игры. Очень вероятно, что капитал будет меньше, чем \$1 и очень маловероятно, что он будет больше \$1, хотя в среднем он действительно оказывается равен $\$1{,}1^n$. Такой перекос получается за счет очень длинного правого хвоста распределения. Таким образом получается ответ на третий вопрос – противоречия нет.

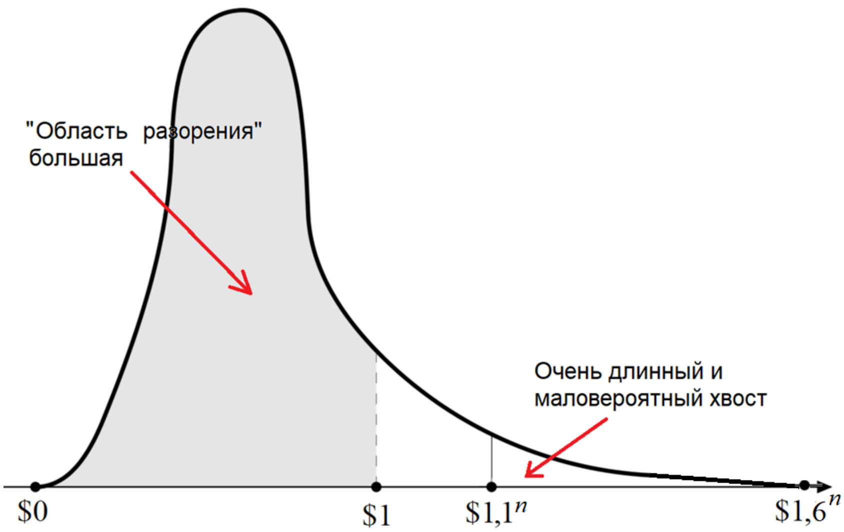

Рис. 3. «Область разорения» намного больше «области обогащения», которая выглядит как очень длинный, но очень тонкий и маловероятный хвост

Конечно, господин Рекенталер в своей игре тщательно подобрал значения + 60% и – 40%, чтобы добиться такого парадоксального эффекта. Вряд ли следует ждать, что при реальном формировании цен на биржевые бумаги описанный эффект проявится столь ярко.