XV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

Лучшее эссе на тему «Двойное округление»

Петрина София (Москва, 8 класс)

Годовые, четвертные оценки являются важным показателем для всех учеников. Но всегда ли они справедливы? Может ли случиться так, что оценка завышена или занижена? Для ответа на эти вопросы давайте разберемся, как это работает.

Выглядит эта система как пирамида – текущие оценки ученика за четверть усредняются, и выставляется четвертная. Затем, в конце года берутся все четвертные оценки ученика, вычисляется их среднее арифметическое, и получается годовая оценка. Но все мы понимаем, что одна и та же четверка может быть на самом деле 3,5 или 4,4.

Есть такой параметр как истинное среднее всех текущих оценок – здесь просто находится среднее от всех оценок ученика за год. Может ли случится так, что отличие истинного среднего от годовой оценки будет больше 0.5? То есть ученику в году выставят несправедливую оценку? Например, в году у него вышло 4 балла, но истинное среднее у него меньше, чем 3.5? Да, может! В обычной ситуации такого, конечно же, не будет. Однако, что если мы возьмем некую крайнюю точку?

Например, в четвертях у ученика были оценки 3, 3, 3, и 5. Тогда в году у ученика вышло 3,5. Но, чтобы сделать истинное среднее как можно меньше, используем самые минимальные отметки. А именно, $3=\lceil 2{,}5 \rceil$; $5=\lceil 4{,}5 \rceil$. Посмотрим, что получится[1]. Годовая оценка: $\lceil 3{,}5 \rceil = 4$.

1 четверть	2 четверть	3 четверть	4 четверть
3 3 2 2	4 2 2 2	3 3 2 2	5 5 5 3
Итоговая: 3	Итоговая: 3	Итоговая: 3	Итоговая: 5

Но если мы посчитаем истинное среднее всех оценок, то мы увидим, что годовая оценка несправедлива:

[1] Символами $\lfloor\ \rfloor$ и $\lceil\ \rceil$ мы, следуя нотации Айверсона, обозначаем соответственно округление вниз вверх до ближайшего целого. Прим. оргкомитета.

$$\frac{3+3+2+2+4+2+2+2+3+3+2+2+5+5+5+3}{16}=3.$$

Годовая четверка на деле оказалась тройкой. Разница между истинным средним и годовой составила ровно 1.

В вышеприведенном примере годовая оценка оказалась выше, чем истинное среднее. Поставим вопрос по-другому: может ли она быть ниже?

Теперь возьмем не минимальные, а максимальные значения. Тройка у нас будет 3,4, а четверка 4,4. Годовая оценка: $\lfloor 3,25 \rfloor = 3$.

1 четверть	2 четверть	3 четверть	4 четверть
4 3 4 2 4	4 3 4 2 4	4 3 4 2 4	5 5 5 5 2
Итоговая: 3	Итоговая: 3	Итоговая: 3	Итоговая: 4

Но истинное среднее равно

$$\frac{4+3+4+2+4+4+3+4+2+4+4+3+4+2+4+5+5+5+5+2}{20}=3,65.$$

То есть на самом деле ученик имеет 4, но из-за двойного усреднения он получил 3.

Таким образом, возникает следующий вопрос: каким может быть наибольшее отклонение в ту или иную сторону?

Предположим, что мы не ограничены в количестве оценок в одной четверти. Тогда у нас может быть ситуация, когда одна четвертная оценка будет иметь больший вес.

Например, оценки в четвертях у ученика 2, 5, 5, и 5. Тогда среднее равно 4,25, годовая 4. Однако предположим, что в первой четверти у него было 2000 оценок (может быть любое большое число), и все они двойки. При этом в остальных трех четвертях было всего лишь по одной оценке и каждая из них это пятёрка.

Тогда при вычислении истинного среднего мы имеем следующий результат:

$$\frac{2\cdot 2000+5+5+5}{2003} = 2,0045,$$

то есть годовая равна 2. Таким образом, максимальная разница составляет 2 балла.

Эксперимент будет таким же в случае, если оценки будут 2, 2, 2, 5, при большом количестве пятерок. Тогда в году выйдет 3 (2,75 средняя четвертная), а большое количество пятёрок потянет истинное среднее к 5 (4,9956). Разница также составляет 2 балла.

Комментарий оргкомитета

Несколько участников олимпиады прислали нам эссе по поводу двойного округления школьных оценок. Тема оказалась животрепещущей. Были гораздо более подробные эссе, чем довольно лаконичная работа Софии Петриной. Однако именно эта работа оказалась наиболее интересной с точки зрения оценки наибольшей возможной разности между истинным средним и результатом двойного округления. По сути, София почти доказала, что отклонение при шкале от 2 до 5 баллов теоретически может достигать значения 2, причем как в большую, так и в меньшую сторону.

По этой причине это эссе признано лучшим по этой теме, и за него София получает 7 баллов из 10, что приносит ей 2-е место в конкурсе эссе.