XIV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

решения задач основного тура 21 декабря 2020 г.— 24 января 2021 г.

4. Города Анчурии (от 6 класса, 1 балл). В Анчурии одна река Рио-Бланко, которая берёт начало где-то в горах и впадает в океан, и всего пять городов: Сан-Матео, Аласан, Коралио, Альфоран и Солитас.

На рисунке показана карта Анчурии, но названий городов нет, города отмечены цифрами. В таблице даны некоторые общие сведения обо всех пяти городах. Определите, где какой город на карте.

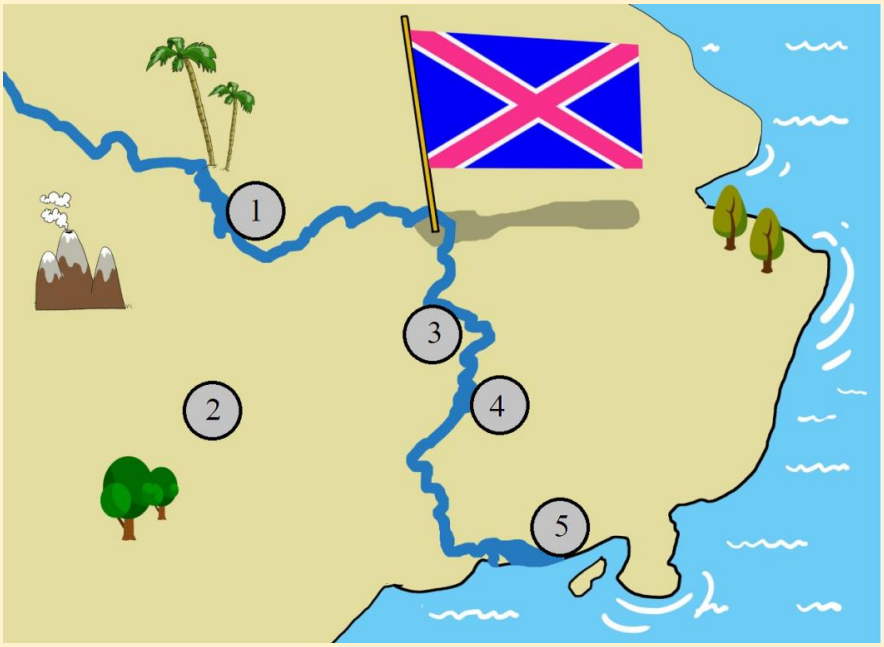

Рис. 1. Точная карта Анчурии (картограф Николай Крутиков)

Табл. Города Анчурии

Город	Площадь, (кв.мили)	Население, (тыс.чел.)	Основная статья дохода	Высота центра города над уровнем моря (в футах)	Источник пресной воды
Сан-Матео	18,3	120,2	Сувенирная промышленность	117	р. Рио-Бланко
Коралио	8,4	30,3	Экспорт обуви	5	р. Рио-Бланко
Аласан	12,0	45,9	Банановодство	349	Колодцы и скважины
Альфоран	9,4	19,6	Доходы от проведения турниров по шашкам	593	р. Рио-Бланко
Солитас	4,1	8,4	Нет доходов	232	р. Рио-Бланко

Решение. Аласан – единственный из городов, который не расположен на берегу реки Рио-Бланко, а берёт воду в скважинах. Значит, Аласан имеет номер 2.

Чем ниже город по течению реки, тем меньше высота над уровнем моря. Из всей доступной статистики требуется только величина «Высота над уровнем моря».

Ответ: 1 – Альфоран, 2 – Аласан, 3 – Солитас, 4 – Сан-Матео, 5 – Коралио.

5. Четыре подруги (от 6 класса, 1 балл). Маша, Нина, Лена и Оля – подруги. Все они разного роста, но разница совсем невелика – на глаз не определить. Однажды они решили узнать, кто выше, а кто ниже. Оказалось, что Нина ниже Маши, а Лена выше Оли. Какова при этом условии вероятность того, что Нина выше Лены?

Решение. Возможны следующие равновозможные распределения по убыванию роста:

МНЛО, МЛНО, МЛОН, ЛОМН, ЛМОН и ЛМНО.

Из этих шести элементарных исходов только один – МНЛО – благоприятствует событию «Нина выше Лены».

Ответ: 1/6.

6. Экспериментальный учебник (от 6 класса, 2 балла). При испытании нового учебника по математике в эксперименте приняли участие примерно одинаковые по численности параллели седьмых классов из двух школ. В каждой школе часть семиклассников училась по экспериментальному учебнику, а часть – по обычному старому учебнику. В конце учебного года был проведен итоговый тест, который показал, насколько хорошо семиклассники освоили учебный материал.

Табл. 1. Результаты теста в 1-й школе

	Учились по экспериментальному учебнику	Учились по обычному учебнику
Выполнили тест хорошо	30%	15%
Выполнили тест плохо	35%	20%
Доля тех, кто выполнил хорошо	0,46	0,43

Табл. 2. Результаты теста во 2-й школе

	Учились по экспериментальному учебнику	Учились по обычному учебнику
Выполнили тест хорошо	20%	45%
Выполнили тест плохо	10%	25%
Доля тех, кто выполнил тест хорошо	0,67	0,64

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

В обеих школах доля тех, кто выполнил тест хорошо, оказалась выше в группе тех, кто учился по экспериментальному учебнику. Поэтому был сделан вывод, что новый учебник обеспечивает более высокое качество образования.

Только Рассеянный Учёный выступил против нового учебника и ко всеобщему удивлению заявил, что те, кто учился по новому учебнику, сдали тест в среднем хуже, чем те, кто учился по старому.

Кто прав?

Решение. Прав Рассеянный Учёный. Предположим для простоты, что в каждой школе одинаковое количество семиклассников, а именно $100x$ человек (множитель 100 взят, чтобы было проще находить проценты). Объединим обе таблицы, но только напишем данные не в процентах, а в абсолютном числе школьников.

Табл. 3. Объединённые результаты теста

	Учились по экспериментальному учебнику	Учились по обычному учебнику
Выполнили тест хорошо	$50x$	$60x$
Выполнили тест плохо	$45x$	$45x$
Доля тех, кто выполнил тест хорошо	$\frac{10}{19} \approx 0{,}53$	$\frac{4}{7} \approx 0{,}57$

Получается, что в объединённой группе, полученной слиянием семиклассников обеих школ, доля тех, кто выполнил тест хорошо, оказывается ниже среди тех, кто учился по экспериментальному учебнику.

Комментарий. Результат может показаться удивительным. Причина в том, что во второй школе школьники успевают намного лучше, чем в первой. Поэтому ни первая, ни вторая школа не образуют репрезентативные выборки из совокупности обеих школ. Получается парадоксальная ситуация: по обеим выборкам видно одно, а в совокупности – другое. Этот парадокс называют *парадоксом Симпсона*.

7. Анчурийские шашки[1] **(от 7 класса, 1 балл).** Турнир по анчурийским шашкам проводится в несколько туров. Если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Ничьей случиться не может, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира.

[1] Автор задачи Б.Р.Френкин

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

На турнир по анчурийским шашкам приехало 26 участников, причем все они играют одинаково хорошо, то есть в партии, которую играют любые двое, шансы соперников одинаковы. Среди игроков Денис и Олег. Найдите вероятность того, что они сыграют между собой.

Решение. Пусть в турнире n участников. В результате каждой сыгранной партии выбывает один участник, поэтому всего состоится $n-1$ партия. При этом никакая пара не может сыграть две партии, поскольку проигравший выбывает. Следовательно, игровых пар на протяжении всего турнира тоже $n-1$. Всего же из n участников можно составить C_n^2 пар игроков, но только $n-1$ из этих возможных пар окажутся игровыми, то есть сыграют между собой. В силу случайности выбора и равной силы противников в каждой партии, вероятность того, что двое наперёд заданных участников попадут в одну из игровых пар, равна $\frac{n-1}{C_n^2}=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$. Подставляя $n=26$, получаем, что Денис и Олег окажутся в одной из игровых пар с вероятностью $\frac{1}{13}$.

Ответ: $\frac{1}{13}$.

8. Путь короля (от 7 класса, 2 балла). Шахматный король находится на поле a1 шахматной доски и хочет пройти на поле h8, двигаясь вправо, вверх или вправо-вверх. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Вместо буквенных обозначений вертикалей используем числовые. Тогда вместо a1 можно записать (1,1). Обозначим $S_{m,n}$ число способов пройти из поля (1,1) на поле (m, n). Нас интересует $S_{8,8}$.

Очевидно, $S_{1,n}=1$ и $S_{m,1}=1$ для всех m и n. В частности, можно считать. что $S_{1,1}=1$, поскольку на поле (1,1) король попадает единственным способом: стоит на месте и ничего не делает.

Если $m>1$ и $n>1$, то на поле (m, n) можно попасть только из одного из трех полей $(m-1,n),(m,n-1)$ и $(m-1,n-1)$. Получается рекуррентное соотношение $S_{m,n}=S_{m-1,n}+S_{m,n-1}+S_{m-1,n-1}$.

Вычисления легко провести в Excel (рис. 2).

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

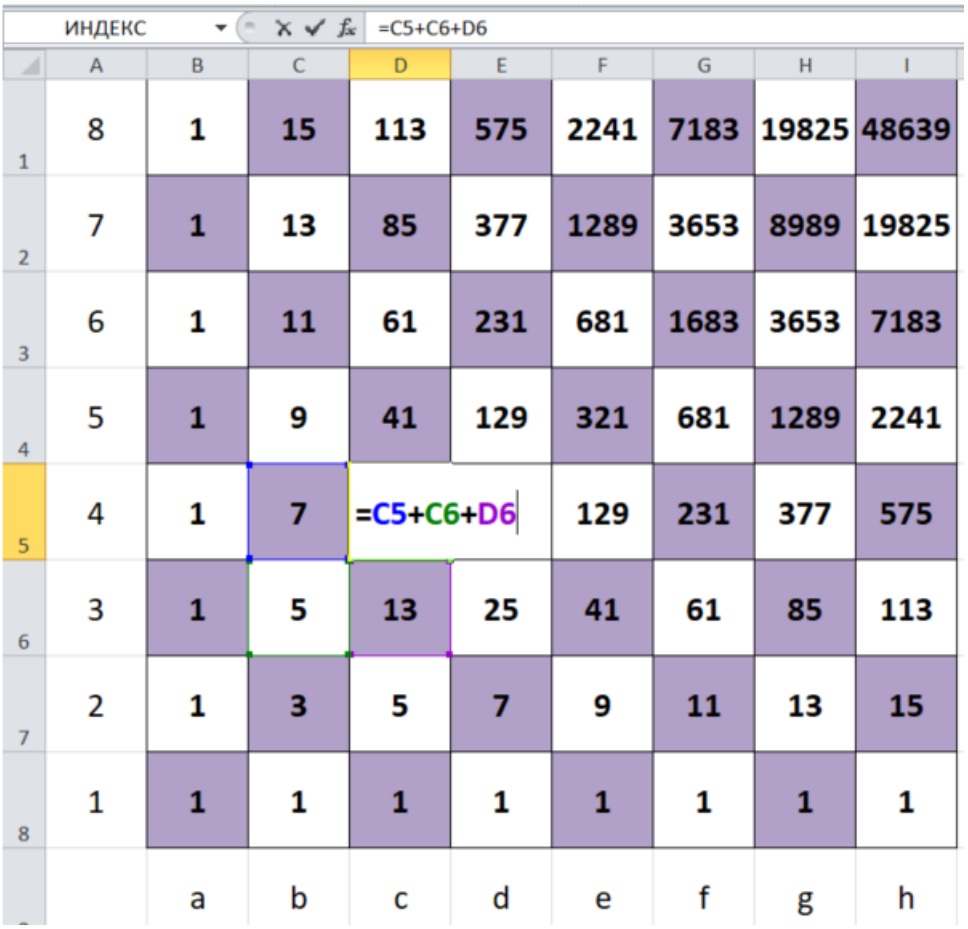

Рис. 2. Решение задачи 8 в Excel

Ответ: 48639.

9. Буратино-статистик (от 7 класса, 2 балла). Буратино каждый месяц играет в лотерею «6 из 45», устроенную Карабасом-Барабасом. В лотерее 45 пронумерованных шаров, и в каждом тираже выпадает 6 случайных выигрышных шаров.

Буратино заметил, что в каждом следующем тираже не бывает шаров, выпавших в предыдущем тираже: во втором тираже не было шаров из первого, в третьем – из второго и т. д.

Буратино не верит в события, вероятность которых меньше чем 0,01. Если происходит такое событие, то Буратино начинает подозревать неладное. После какого тиража Буратино начнет подозревать, что Карабас-Барабас жульничает?

Решение. Вероятность того, что во втором тираже не повторятся числа из первого, равна $a = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot \ldots \cdot 34}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot \ldots 40} = 0,40056...$, что чуть больше, чем 0,4. Вероятность того, что повторений предыдущего тиража не будет во втором и в третьем тиражах, равна квадрату этого числа, то есть a^2. Вероятность отсутствия повторений в тиражах со второго по четвёртый равна a^3, и так далее. Пятая степень

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

числа a больше, чем 0,01: $a^5 > 0,4^5 = 10^{-5} \cdot 2^{10} = 0,01024$, а шестая уже меньше: $a^6 = 0,0041...$. Значит, Буратино может обвинить Карабаса-Барабаса после того, как это явление повторится 6 раз, то есть после седьмого тиража.

Ответ: после седьмого.

10. Произведение цифр (от 7 класса, 3 балла). Незнайка решал следующую задачу. «Дан набор из 20 случайных цифр. Найдите вероятность того, что произведение этих цифр оканчивается на 0». Незнайка рассуждал так.

Если набор содержит цифру 0*, то произведение цифр точно оканчивается на 0. Вероятность этого равна* $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$ *. Если номер не содержит* 0 *(вероятность этого* $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$*),*

то, чтобы произведение было нулевым, он должен содержать хотя бы одну чётную цифру и цифру 5*.*

Среди девяти ненулевых цифр пять нечётные. Вероятность того, что все цифры нечётные, равна $\left(\frac{5}{9}\right)^{20}$*, значит, вероятность того, что есть хотя бы одна чётная цифра, равна* $1-\left(\frac{5}{9}\right)^{20}$ *.*

Когда мы удостоверились, что в номере нет нуля, но есть чётная цифра, надо убедиться в том, что есть цифра 5. Условная вероятность того, что пятёрки нет, при условии, что есть чётная цифра, равна $\left(\frac{8}{9}\right)^{19}$*, ведь одна позиция занята чётной цифрой, так что пятёрка на этой позиции точно стоять не будет, остаётся 19 позиций, и пятёрка отсутствует, если на каждой из них одна из восьми цифр (не* 5 *и не* 0*). Поэтому условная вероятность того, что пятёрка есть, равна* $1-\left(\frac{8}{9}\right)^{19}$ *. Следовательно, искомая вероятность равна*

$$\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^{20}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^{19}\right)\approx 0,987\,.$$

Знайка провёл эксперимент: он сгенерировал на компьютере 1000 случайных последовательностей по 20 цифр в каждой и нашёл долю тех последовательностей, где произведение цифр оканчивалось нулём. Эксперимент дал результат близкий к ответу Незнайки. Расхождение оказалось совсем небольшим и, возможно, случайным, если Незнайка правильно решил задачу. Или не случайным?

Повторите эксперимент Знайки несколько раз. Удаётся ли с помощью эксперимента подтвердить или опровергнуть правоту Незнайки? Если Незнайка все же ошибся, то как правильно решить задачу?

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

Решение. В рассуждении Незнайки есть ошибка: если в наборе есть чётная цифра, то это не значит, что она там одна. Если чётных цифр несколько, то ни на одной из позиций, занятых этими цифрами, не может стоять пятёрка, поэтому условная вероятность того, что пятёрка есть, зависит от того, сколько в наборе чётных цифр.

Эксперимент Знайки, видимо, верен. Но он даёт только приближённое значение вероятности. Правильным представляется следующее рассуждение.

Введём события A_i «i-я цифра набора делится на 2» и B_j «j-я цифра делится на 5», $\mathrm{P}(A_i)=0{,}5$, $\mathrm{P}(B_j)=0{,}2$. События A_i попарно независимы, события B_j попарно независимы, события A_i и B_j при $i\neq j$ также независимы. Кроме того, события A_i и B_i независимы, потому что вероятность их одновременного наступления равна 0,1.

Отсюда следует, что события $A_1,\ldots,A_{20},B_1,\ldots,B_{20}$ независимы в совокупности. Действительно, если у нас есть какой-то набор некоторых из этих событий, то события с разными индексами независимы, поскольку они относятся к разным цифрам, а события A_i и B_i с одним индексом, как мы заметили, тоже независимы, поэтому вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей.

Интересующее нас событие «произведение оканчивается цифрой 0» состоит в том, что наступило хотя бы одно из событий A_i и хотя бы одно из событий B_i. Вероятность того, что не наступило ни одно из A_i, равна $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$, а вероятность противоположного события «наступило хотя бы одно из событий A_i» равна $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$. Аналогично, вероятность того, что не наступило ни одно из B_i, равна $\left(1-\frac{1}{5}\right)^{20}=\left(\frac{4}{5}\right)^{20}$, а вероятность противоположного события «наступило хотя бы одно из событий B_i» равна $1-\left(\frac{4}{5}\right)^{20}$. Поскольку A_i и B_i независимы, искомая вероятность равна

$$\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{20}\right)=\left(1-0{,}5^{20}\right)\cdot\left(1-0{,}8^{20}\right)\approx 0{,}98847.$$

Ответ: прибл. 0,988.

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

11. Туз бубен (От 8 класса, 2 балла). Тридцать шесть игроков играют в игру: из карточной колоды, в которой 36 карт, они по очереди выбирают по случайной карте. Если игроку попался туз бубен, то игрок выиграл; если же попалась другая карта, игрок возвращает её в колоду, и карту тянет следующий игрок. Так они тянут карты по кругу: сначала первый, затем второй и т.д. Если на первом круге никому не попался туз бубен, игроки в том же порядке тянут карты по второму кругу. Это продолжается до тех пор, пока кто-то из них не вытянет туза бубен.

Предположим, что перед началом игры игроки сделали ставки, и выигравший забирает их все. Как должны относиться ставки игроков, чтобы игра стала безобидной, то есть математические ожидания выигрыша у всех игроков оказались равны между собой (то есть равны нулю с учётом внесенной суммы)?

Решение. Обозначим вероятность выигрыша первого игрока p_1. Предположим, что первый игрок в первый раз не вытянул туза бубен. Вероятность этого 35/36. В этот момент второй игрок становится первым, и вероятность того, что он выиграет, становится равна p_1. Возвращаясь к началу игры, мы видим, что для выигрыша второго игрока нужно, чтобы сначала первый промахнулся. Значит, в начале игры вероятность выигрыша второго игрока равна $\frac{35}{36}p_1$, а это меньше, чем p_1.

Аналогично, вероятность выигрыша у каждого следующего игрока во столько же раз меньше, чем у предыдущего: $p_{k+1}=\frac{35}{36}p_k$. Игра нечестная.

Пусть L_k — ставка игрока номер k, а L — суммарная ставка, равная сумме ставок всех игроков. Чтобы игра стала безобидной, нужно, чтобы математическое ожидание выигрыша каждого игрока равнялось нулю:

$$\left(L-L_k\right)p_k+\left(1-p_k\right)\left(-L_k\right)=0, \text{ откуда } L_k=Lp_k.$$

Получается, что ставки игроков должны быть пропорциональны вероятностям их выигрышей, то есть ставка каждого следующего игрока должна быть в $\frac{36}{35}$ раза меньше ставки предыдущего.

Ответ: ставка каждого следующего игрока должна относиться как $35:36$ к ставке предыдущего.

12. Зимний лагерь. В зимнем лагере в комнате живут Ваня и Гриша. Каждый вечер они бросают жребий, кому гасить свет перед сном: дело в том, что выключатель около двери, и проигравшему приходится идти к кровати в полной темноте, натыкаясь на стулья.

Обычно Ваня и Гриша бросают жребий без затей, но в этот раз Гриша придумал особенный жребий:

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

– Давай бросать монету. Если при каком-то чётном броске выпадет орёл, то дальше монету не бросаем: я выиграл. Если же при каком-то нечётном броске выпадет решка, то выиграл ты.

а) **(от 8 класса, 2 балла).** Какова вероятность выигрыша Гриши?

б) **(от 8 класса, 2 балла).** Найдите математическое ожидание числа бросков монеты до окончания жребия.

Решение. а) Будем считать, что орёл при очередном броске даёт единицу, а решка – ноль в дробной части двоичной дроби. Получается некоторое число x, представленное двоичной дробью. Например, если последовательность бросаний начинается ОРО, то получается двоичная дробь 0,101.

Очевидно, $0 \le x \le 1$, при этом вероятность события $0 \le x \le a$ равна a при любом неотрицательном $a \le 1$ (попробуйте это строго обосновать)

Нетрудно видеть, что Гриша выиграет, только если последовательность бросков даст число x, которое больше, чем

$$0{,}10101010101\ldots = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность этого равна $\frac{1}{3}$. Если полученная дробь меньше, чем 2/3, то выигрывает Ваня. Событие «получится в точности 2/3» имеет нулевую вероятность.

Другое решение можно получить, если рассмотреть два первых броска. Гриша выигрывает только в случае ОО, а в случае ОР не выигрывает никто, и игра начинается снова. Поэтому вероятность выигрыша Гриши p можно найти из уравнения

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p, \text{ откуда } p = \frac{1}{3}.$$

б) Успехом назовём бросок, при котором жребий решился, то есть выпадение орла при чётном броске или решки при нечётном. Вероятность успеха при каждом отдельном броске равна 0,5. В силу независимости бросков математическое ожидание числа бросков равно 2.

Ответ: а) 1/3; б) 2.

13. Короткий алгоритм (от 8 класса, 2 балла). Есть 4 монеты разного веса. За одно действие можно взвесить две монеты на чашечных весах без гирь и узнать, какая из них тяжелее. Требуется упорядочить монеты по весу. Покажите, что существует способ упорядочить монеты, при котором математическое ожидание числа взвешиваний меньше, чем 4,8.

Решение. Построим алгоритм, дающий среднее число взвешиваний $4\frac{2}{3}$. Обозначим монеты *A*, *B*, *C* и *D*. Меньше, чем тремя взвешиваниями не обойтись. Первыми двумя взвешиваниями сравним *A* с *B* и *C* с *D*. Будем предполагать для

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

определённости, что $A<B$ и $C<D$, то есть что A легче, чем B и что C легче, чем D. Если это не так, то переименуем монеты, чтобы это было так. Дальнейший процесс изобразим с помощью дерева (рис.3).

Таким образом, к начальным двум взвешиваниям нужно прибавить:

- с вероятностью $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ещё два;

- с вероятностью $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ещё три.

Искомое математическое ожидание равно $2+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

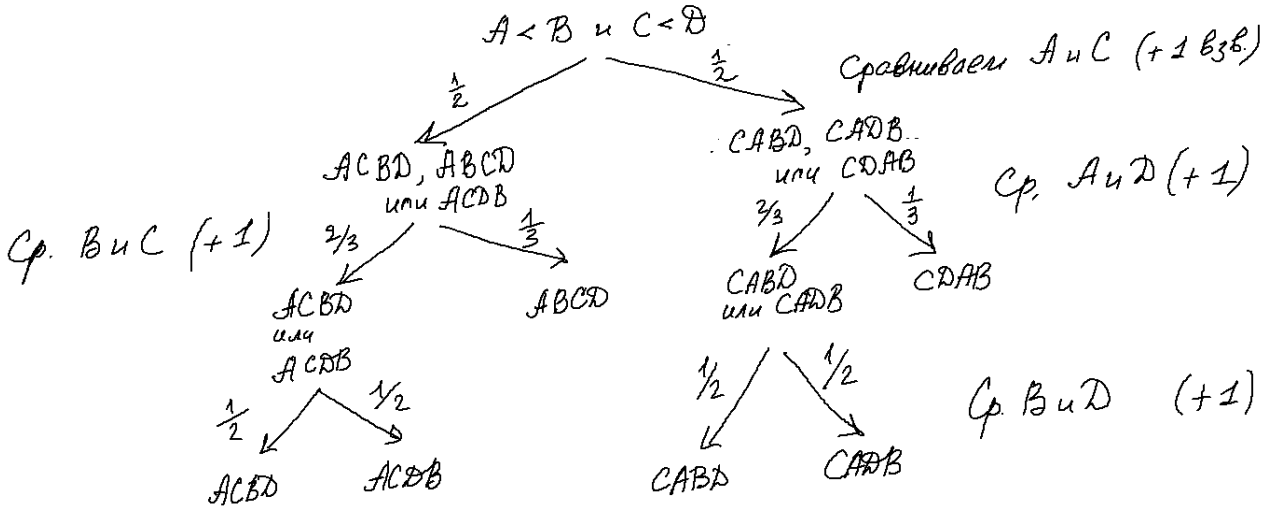

Рис. 3. Бинарное дерево алгоритма

14. Ошибка стажёра (от 8 класса, 3 балла). На хлебозаводе дозирующий автомат отмеряет порции теста массой 400 г. Принято правило: если стандартное отклонение десяти случайных измерений превосходит 5% номинальной массы порции, то автомат требует ремонта.

Для проверки автомата юный стажёр Иванов взвесил 10 случайных порций, отмеренных автоматом, с точностью до грамма и записал в таблицу, на сколько граммов порции отличаются в ту или иную сторону от номинальной массы 400 г.

Номер порции	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отличие от 400 г	12	32	18	19	28	15	7	22	12	21

Молодой инженер Петров рассердился и сказал, что вся работа насмарку, поскольку знаки отклонений неизвестны, и он не может вычислить ни стандартное отклонение, ни даже среднее арифметическое.

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

Опытный мастер Сидоров лишь покачал головой и заявил, что всё не так плохо. Конечно, найти стандартное отклонение невозможно, но можно математически доказать, что автомат ремонта не требует. Как мог рассуждать мастер Сидоров?

Решение. Мастер мог рассуждать так.

Среднее квадратичное отклонение от 400 г равно

$$\sqrt{\frac{12^2+32^2+18^2+\ldots+21^2}{10}}=\sqrt{398}\ \text{г}.$$

Стандартное отклонение, то есть среднее квадратичное отклонение чисел массива от среднего арифметического, не больше, чем среднее квадратичное отклонение от любого другого числа, поэтому стандартное отклонение масс теста в контрольной партии не больше, чем $\sqrt{398}\ \text{г}<20\ \text{г}$*, то есть меньше, чем 5% от номинальной массы 400 г.*

В рассуждении использован известный факт: стандартное отклонение произвольного числового массива $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ не превосходит среднего квадратичного отклонения этого массива от любого числа. Докажем это. Достаточно показать, что дисперсия не больше, чем средний квадрат отклонения от любого числа.

Запишем средний квадрат отклонения от произвольного числа y:

$$\frac{(x_1-y)^2+(x_2-y)^2+(x_3-y)^2+\ldots+(x_n-y)^2}{n}=$$

$$=y^2-\frac{2}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)y+\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

В правой части получился квадратный трёхчлен от переменной y. Он принимает наименьшее значение в точке

$$y_0=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right)=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\overline{x}.$$

Таким образом, при $y=\overline{x}$ средний квадрат отклонений от y достигает своего наименьшего значения, равного дисперсии массива.

15. Красное и чёрное (от 8 класса, 3 балла). Банкомёт[2] по одной сдаёт игроку карты из хорошо перетасованной обычной карточной колоды. В любой момент, пока у банкомёта еще остались карты, игрок может сказать «Стоп». После этого банкомёт открывает ещё одну карту. Если она красной масти, то игрок выигрывает, если чёрной, то проигрывает.

Существует ли у игрока стратегия, при которой вероятность выигрыша больше чем 0,5?

[2] В некоторых карточных играх тот, кто сдает игрокам карты, называется банкомётом.

Решение. Предположим, что такая стратегия существует, то есть, руководствуясь последовательностью уже открытых карт, игрок может определить оптимальный момент, когда нужно сказать «Стоп».

Пусть в этот момент в колоде остаются закрытыми r красных и b чёрных карт. Тогда вероятность успеха, то есть события «следующая карта красная», равна $\frac{r}{r+b}$.

Изменим правило и скажем «Стоп» после следующей карты (назовем это правило «плюс одна»). Тогда закрытыми останутся $r+b-1$ карт, среди которых $r-1$ красная и b чёрных с вероятностью $\frac{r}{r+b}$ или r красных и $b-1$ чёрная с вероятностью $\frac{b}{r+b}$. Таким образом, при правиле «плюс одна» игрок выиграет с вероятностью

$$\frac{r}{r+b}\cdot\frac{r-1}{r+b-1}+\frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b-1}=\frac{r(r+b-1)}{(r+b)(r+b-1)}=\frac{r}{r+b}.$$

Иными словами, переход от исходной стратегии к стратегии «плюс одна» не меняет вероятности выигрыша. Рассуждая так же, видим, что вероятность останется той же, если ещё раз изменить стратегию и пользоваться стратегией «плюс две». И так далее. Получается, что если игрок знает выигрышное правило, после какой карты сказать «Стоп», то он может сказать «Стоп» не только после этой карты, но и после любой следующей за ней, при этом вероятность выигрыша останется такой же. Значит, можно принять правило «Стоп» после предпоследней карты» независимо от того, какова была предыдущая последовательность открытых карт, и это не изменит вероятности выигрыша. Получается, что какова бы ни была выбранная стратегия, всё зависит от последней карты в колоде. Но она с равными шансами может оказаться чёрной или красной. Значит, до начала игры никакая заранее выбранная стратегия не гарантирует перевес шансов игрока.

Ответ: нет.

Замечание. Сказанное не значит, что при некотором развитии событий вероятность не может быть больше, чем 0,5. Например, если в колоде 36 карт, и в какой-то момент открылись все 18 чёрных, то все оставшиеся красные, и игрок выиграет с вероятностью 1. Однако следование стратегии «ожидание всех чёрных» с тем же успехом может привести к гарантированному проигрышу, а именно тогда, когда вопреки ожиданиям сначала открылись все красные.

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

16. Почтовые ящики. В новом только что заселённом многоквартирном доме рабочие повесили блок из 80 почтовых ящиков. Внутрь каждого ящика они положили кольцо с ключом и биркой с номером квартиры, но не позаботились о том, чтобы в каждом ящике лежал ключ от этого ящика. Они просто покидали ключи в ящики в случайном порядке. Ящики, разумеется, заперты.

Рассеянный Учёный, недавно поселившийся в квартире 37, обрадовался, увидев ящики, но консьержка сказала, что достать ключи она не может. Нужно идти в управляющую компанию, которая осуществляет приём граждан каждый третий понедельник месяца с 12.00 до 12.30.

Найдя в мусорной урне палочку (кто-то заказывал суши), Учёный с четвёртой попытки сумел извлечь ключ из ящика № 37. Он рассуждал следующим образом: если это ключ от моего ящика, то всё хорошо. Если нет, то я открою ящик, от которого этот ключ, ключ оставлю в замке, выну из ящика следующий ключ, открою им следующий ящик и так далее, пока не достану свой ключ.

а) (**от 8 класса, 3 балла).** Докажите, что описанный алгоритм результативен, то есть что Рассеянный Учёный найдёт свой ключ.

б) **(от 9 класса, 6 баллов).** Найдите математическое ожидание числа жильцов, которым придётся ковырять в ящиках палочкой, если все они будут следовать алгоритму Рассеянного Учёного.

Решение. Почтовые ящики и ключи будем нумеровать так же, как квартиры. Нужно показать, что рано или поздно Учёный достанет ключ 37 от ящика 37.

Последовательность номеров извлечённых ключей не может быть бесконечной, поскольку квартир всего 80. Последовательность должна оканчиваться номером 37. Если это не так, и последний номер не 37, то будет открыт следующий ящик, и Учёный достанет из него следующий ключ. Но тогда предыдущий номер не будет последним. Противоречие. Значит, последний ключ 37, а это и значит, что алгоритм результативен.

Чтобы решить задачу б), представим себе ориентированный граф, вершины которого изображают почтовые ящики. Если в ящике a лежит ключ от ящика b, то в графе есть ребро $(a;b)$. Других рёбер в графе нет. В каждую вершину входит ровно одно ребро, и из каждой вершины выходит ровно одно ребро (может быть, то же самое, если в ящике лежит ключ от этого же ящика). Получается, что степень каждой вершины равна 2. Следовательно, этот граф является объединением непересекающихся циклов. Каждый жилец посредством палочки «попадает» в какую-то вершину этого цикла и завершает его, достав ключ от своего почтового ящика. Требуется найти среднее количество циклов X.

Пусть $I_{1,2,\ldots,k}$ – индикатор события «вершины $1,2,\ldots,k$ образуют цикл, причём именно с таким порядком вершин», то есть $I_{1,2,\ldots,k}=1$, если это так, и $I_{1,2,\ldots,k}=0$, если это не так.

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

Если общее количество вершин-ящиков в графе равно n, то математическое ожидание $\mathrm{E}\,I_{1,2,\ldots,k}$ равно вероятности этого события и равно

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Кратко поясним, почему это так. Первый множитель – это вероятность того, что в ящике 1 лежит ключ 2. Второй множитель равен вероятности того, что при этом в ящике 2 окажется ключ 3, и так далее.

Точно такова же вероятность, что цикл образует любой упорядоченный набор из k вершин. Общее количество X_k упорядоченных циклов длины k равно сумме индикаторов всех возможных упорядоченных циклов с ровно k вершинами, а таких возможных циклов

$$C_n^k\cdot(k-1)!=\frac{n!}{k(n-k)!}.$$

Поэтому $\mathrm{E}\,X_k=\frac{n!}{k(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{k}$. Иными словами, получается в среднем 1 цикл длины 1, полцикла длины 2, треть цикла длины 3 и так далее – среднее число циклов длины n равно $\frac{1}{n}$, а математическое ожидание числа всех циклов равно

$$\mathrm{E}\,X=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Полученная сумма называется n-ым гармоническим числом и обозначается H_n. При $n=80$ с помощью компьютера или калькулятора находим, что $H_n\approx 4{,}965$. Известно приближённое равенство

$$H_n\approx\ln n+\gamma+\frac{1}{2n},$$

где γ – константа Эйлера-Маскерони, равная пределу разности между гармоническим числом и натуральным логарифмом: $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(H_n-\ln n)$. В практических расчетах можно полагать γ равным 0,58. Если воспользоваться этой приближённой формулой, то получим, что среднее число жильцов, ковыряющих палочкой, приблизительно равно $\ln 80+0{,}58+\frac{1}{160}\approx 4{,}968$.

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

17. Счастливые суммы (от 8 класса, 4 балла). В лотерее «Счастливая сумма» всего N шаров с номерами от 1 до N. Во время основного тиража случайным образом выпадают 10 шаров. Во время дополнительного тиража из этого же набора шаров случайно выбирают 8 шаров. Сумма номеров на выпавших шарах в каждом тираже объявляется *счастливой суммой,* и те игроки, кто эту сумму предсказал, получают выигрыш.

Может ли быть, что события A «в основном тираже счастливая сумма равна 63» и B «в дополнительном тираже счастливая сумма равна 44» равновероятны? Если да, то при каком условии?

Решение. В основном тираже всего возможно C_N^{10} комбинаций, а в дополнительном – C_N^8 комбинаций. Обозначим $S_{63,10}$ количество комбинаций в первом тираже, при которых сумма равна 63. Слагаемые – различные натуральные числа от 1 до N. Если самое малое число 2 или больше, то сумма всех десяти слагаемых не меньше, чем

$$2+3+\ldots+11=\frac{2+11}{2}\cdot 10=13\cdot 5=65.$$

Значит, самое малое число равно 1. Отбрасывая в каждом слагаемом единицу, то есть вычитая из суммы 10, мы находим, что остальная сумма 53 получена девятью различными натуральными слагаемыми, каждое из которых не превосходит числа N. Иными словами, способов получить сумму 63 десятью слагаемыми столько же, сколько способов получить сумму 53 девятью слагаемыми: $S_{63,10}=S_{53,9}$.

Рассуждая аналогично, получаем: $S_{63,10}=S_{53,9}=S_{44,8}$. Теперь можно найти отношение вероятностей:

$$\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{S_{44,8}\cdot C_N^{10}}{C_N^8\cdot S_{63,10}}=\frac{C_N^{10}}{C_N^8}=\frac{8!(N-8)!}{10!(N-10)!}=\frac{(N-8)(N-9)}{90}.$$

Найдем, при каких N полученная дробь равна единице:

$$\frac{(N-8)(N-9)}{90}=1;\ N^2-17N-18=0,\text{ откуда }\ N=18.$$

Ответ: такое возможно, если в лотерее 18 шаров.

18. Везучий шпион (от 9 класса, 2 балла). В абсолютно случайную точку абсолютно квадратного леса 10×10 км на парашюте спускается шпион с радиопередатчиком. Приземлившись, он немедленно начинает радиопередачу, сообщая противнику важные сведения.

Во всех четырёх углах леса расположены радиопеленгаторы, каждый из которых обнаруживает работу передатчика на расстоянии не более 10 км. Чтобы контрразведка точно определила координаты работающего передатчика, нужно, чтобы передатчик был обнаружен хотя бы двумя пеленгаторами.

Шпиону повезло: один из радиопеленгаторов сегодня не работает. Какова вероятность того, что контрразведчики не смогут определить координаты места, где приземлился шпион?

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

Решение. Предположим для определённости, что не работает пеленгатор в северо-восточном углу (рис. 4). На рисунке показано, сколько пеленгаторов «видит» каждую из шести образовавшихся областей. Место, где притаился шпион, нельзя точно определить, если он оказался в одной из двух областей, видимых только одному пеленгатору.

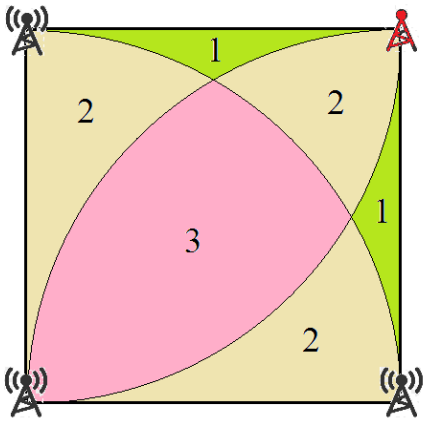

Рис. 4.

Будем считать, что сторона квадрата равна 1. Введём обозначения, как показано на рис. 5, и найдём площадь закрашенной фигуры, состоящей из равностороннего треугольника AED и двух одинаковых секторов ABE и DEC.

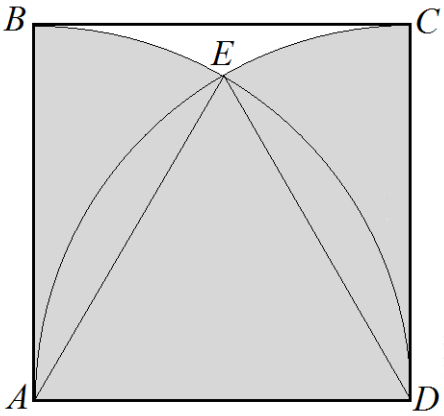

Рис. 5.

Площадь треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$, а каждый сектор имеет центральный угол $30°$, поэтому площадь каждого сектора в двенадцать раз меньше площади единичного круга, то есть она равна $\frac{\pi}{12}$. Тогда площадь всей закрашенной фигуры равна $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$, а площадь криволинейного треугольника BEC равна $1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}$. Площадь всей зоны, где местоположение шпиона нельзя определить, вдвое больше: $2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\approx 0{,}087$.

Ответ: прибл. 0,087.

19. Маршрутное такси. Проезд в маршрутке стоит 75 рублей. Пятнадцать пассажиров заходят поодиночке и между собой деньгами не меняются. С вероятностью 0,5 пассажир даёт водителю купюру 100 рублей и получает 25 рублей сдачи монетами по 5 или 10 рублей, а с вероятностью 0,5 пассажир даёт водителю 50 рублей одной купюрой и 25 рублей монетами.

а) **(от 9 класса, 5 баллов)** Перед рейсом у водителя монет не было вообще. Какова вероятность того, что водитель сможет немедленно дать сдачу каждому, кто расплачивается купюрой 100 рублей?

б) **(от 9 класса, 7 баллов)** Какую сумму монетами должен иметь водитель перед выездом, чтобы с вероятностью не менее 0,95 иметь возможность немедленно дать сдачу всем пассажирам, расплатившимся сторублёвкой?

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

Решение. а) Не играет роли, какими именно монетами пассажир или водитель набирают 25 рублей. Можно считать, что они используют монеты достоинством 25 рублей. Тогда будем считать не рубли, а количество монет у водителя. Кроме того, временно предположим, что водитель может залезать в долги, то есть у него может возникнуть отрицательное количество монет. Тогда вопрос можно переформулировать: какова вероятность того, что количество монет у водителя в любой момент времени неотрицательно?

Получается стандартная схема случайного блуждания: сначала величина равна нулю (в начальный момент у водителя монет нет), а на каждом следующем шаге она с равными вероятностями увеличивается или уменьшается на 1.

Каждое возможное блуждание можно изобразить траекторией, то есть ломаной линией в системе координат. Например, траектория может быть такой, как на рисунке 6. Согласно этой траектории, процесс развивается следующим образом: первый пассажир даёт водителю 50 рублей и одну монету, второй – тоже. Затем третий пассажир требует сдачу со 100 рублей, и так далее. В какой-то момент водитель оказывается должен одну, затем две монеты, но к концу поездки у него все же остаётся одна монета. Будем говорить, что такая траектория имеет вид $(0 \to 1)$, поскольку начинается на высоте 0 и заканчивается в точке с ординатой 1.

Всего различных траекторий 2^{15}, и все они равновозможны: вероятность каждой равна $\frac{1}{2^{15}}$.

Пусть к концу поездки у водителя k монет. Число k нечётное, так как чётного количества монет после нечётного числа пассажиров быть не может. Траекторий вида $(0 \to k)$ столько же, сколько траекторий вида $(1 \to k+1)$: последние получаются из первых сдвигом на единицу вверх.

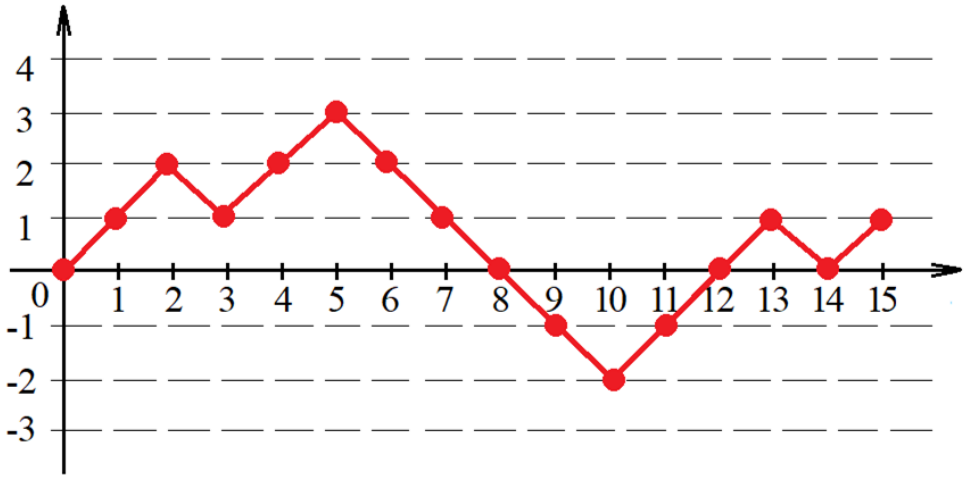

Рис. 6. Пример траектории блуждания.

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

Событие «водитель сможет немедленно дать сдачу всем пассажирам» состоит в том, что траектория вида $(0 \to k)$ не опускается ниже нуля, или, что то же самое, что траектория вида $(1 \to k+1)$ не достигает нуля, оставаясь всё время в верхней полуплоскости.

Зафиксируем $k \geq 0$ и рассмотрим траектории вида $(1 \to k+1)$, которые достигают нуля. Оказывается, таких траекторий ровно столько, сколько существует всего траекторий из -1 в $k+1$. Этот интересный факт становится очевиден, если удачно воспользоваться симметрией. Любая траектория вида $(-1 \to k+1)$ обязательно в какой-то момент проходит через 0. Найдём первый такой момент и отразим в верхнюю полуплоскость часть траектории, расположенную левее этого момента (рис. 7). Получится траектория $(1 \to k+1)$, обязательно принимающая значение 0.

Рис. 7. Любая траектория вида $(1 \to 1)$, проходящая через 0, однозначно соответствует некоторой траектории вида $(-1 \to 1)$. Момент первого возвращения в 0 здесь равен 4.

Обратно: если взять произвольную траекторию вида $(1 \to k+1)$, принимающую в первый раз значение 0 в некоторой точке, и отразить в нижнюю полуплоскость левую часть этой траектории, то получится траектория вида $(-1 \to k+1)$.

Получается, что траекторий вида $(1 \to k+1)$, проходящих через 0, столько же, сколько всего траекторий вида $(-1 \to k+1)$, а их столько, сколько существует способов чередовать 15 шагов вверх и вниз так, чтобы шагов вверх оказалось на $k+2$ больше, чем вниз. Если обозначить число шагов вверх u, а число шагов вниз d, то получается система уравнений

(c) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

$$\begin{cases} u+d=15, \\ u-d=k+2, \end{cases} \text{ откуда } u=\frac{k+17}{2}.$$

Следовательно, траекторий вида $(-1\to k+1)$ ровно $C_{15}^{0,5(k+17)}$. Чтобы не нарушать общность и не рассматривать отдельные случаи, можно считать, что при $k>13$ число $C_{15}^{0,5(k+17)}$ равно нулю (верхний индекс больше чем 15).

Общее количество траекторий $(0\to k)$ найдём тем же способом: число шагов вверх должно на k превосходить число шагов вниз. Получается $C_{15}^{0,5(k+15)}$. Значит, количество траекторий вида $(0\to k)$, не опускающихся ниже нуля и приходящих в точку с ординатой k, равно $C_{15}^{0,5(k+15)}-C_{15}^{0,5(k+17)}$. Осталось просуммировать все эти числа при нечётных k от 1 до 15.

$$\left(C_{15}^{8}-C_{15}^{9}\right)+\left(C_{15}^{9}-C_{15}^{10}\right)+\left(C_{15}^{10}-C_{15}^{11}\right)+...+\left(C_{15}^{15}-C_{15}^{16}\right)=C_{15}^{8}=\frac{15!}{8!\cdot 7!}=6435.$$

Следовательно, искомая вероятность события «водитель сможет немедленно дать сдачу каждому пассажиру» равна $\frac{6435}{2^{15}}\approx 0{,}196$.

б) Пусть у водителя перед рейсом k монет. Водитель сможет дать сдачу всем тогда и только тогда, когда траектория случайного блуждания, соответствующая развитию событий, неотрицательна и имеет вид $(k\to m)$, где m — количество монет к концу поездки, причём $m=k-15,k-13,...,k+15$.

Таких траекторий столько же, сколько траекторий вида $(k+1\to m+1)$, целиком лежащих выше нуля.

Снова используем уже знакомую нам симметрию: траекторий вида $(k+1\to m+1)$, проходящих через ноль, столько же, сколько всего траекторий вида $(-k-1\to m+1)$, то есть $C_{15}^{\frac{15+(k+m+2)}{2}}=C_{15}^{\frac{17+k+m}{2}}$.

Значит, положительных траекторий вида $(k+1\to m+1)$ всего $C_{15}^{\frac{15+m-k}{2}}-C_{15}^{\frac{17+k+m}{2}}$. Столько же неотрицательных траекторий вида $(k\to m)$.

Просуммируем эти числа при всех m от $k-15$ до $k+15$ с шагом 2. Получаем 16 слагаемых

$$\left(C_{15}^{0}-C_{15}^{k+1}\right)+\left(C_{15}^{1}-C_{15}^{k+2}\right)+\left(C_{15}^{2}-C_{15}^{k+3}\right)+...+\left(C_{15}^{14}-C_{15}^{k+15}\right)+\left(C_{15}^{15}-C_{15}^{k+16}\right),$$

причём в этой сумме числа C_{15}^{j}, у которых $j<0$ или $j>15$, нужно считать равными нулю. Упростим полученное выражение:

(с) Московский центр непрерывного математического образования, 2021

$$C_{15}^0 + C_{15}^1 + \ldots + C_{15}^{15} - \left(C_{15}^{k+1} + \ldots + C_{15}^{14} + C_{15}^{15}\right) = C_{15}^0 + C_{15}^1 + \ldots + C_{15}^k.$$

Поэтому вероятность события «монет хватит» равна $\frac{C_{15}^0 + C_{15}^1 + \ldots + C_{15}^k}{2^{15}}$. Эта вероятность должна быть не меньше, чем 0,95, откуда

$$C_{15}^{k+1} + C_{15}^{k+2} + \ldots + C_{15}^{15} = C_{15}^0 + C_{15}^1 + \ldots + C_{15}^{14-k} \leqslant 0{,}05 \cdot 2^{15} = 1638{,}4.$$

Таким образом, нужно суммировать числа C_{15}^j в 15-й строке треугольника Паскаля до тех пор, пока полученные суммы остаются меньше, чем 1638. Наибольшее j следует положить равным $14-k$ и найти k. Запишем вычисления в таблице.

j	0	1	2	3	4	5
C_{15}^j	1	15	105	455	1365	3003
Сумма	1	16	121	576	1941	4944

Сумма не превосходит 1638 при $j \leqslant 3$. Следовательно, $k \geqslant 14-3=11$. Значит, водителю нужно запасти не меньше чем 275 рублей мелочью.

Ответ: а) прибл. 0,196; б) 275 р.