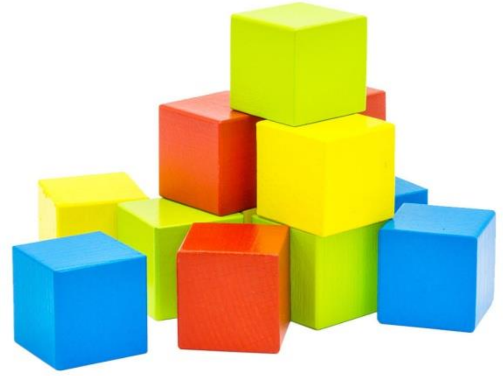
Александра Нестеренко

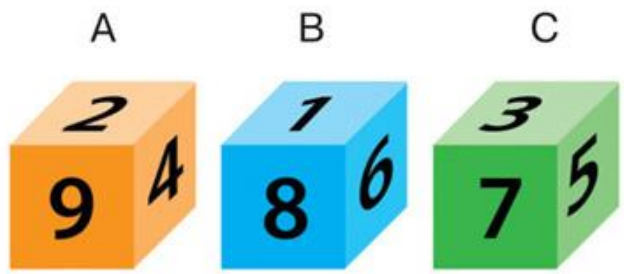
Нетранзитивные кости

эссе

1. Нетранзитивный волчок

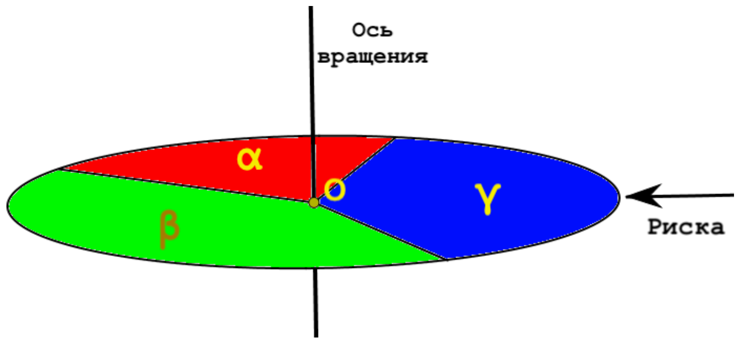
Наверное, детские кубики моей младшей сестры гордятся тем, что у них есть интересные нетранзитивные родственники.





Нетранзитивные кости

Еще у сестры есть волчки. Чтобы они не расстраивались и не завидовали кубикам, придумаем нетранзитивный волчок.



Нетранзитивный волчок

Диск волчка, который крутится вокруг неподвижной вертикальной оси, разделен на три сектора с углами α, β и γ. Рядом с диском установлена неподвижная риска. За каждым игроком закрепляется сектор: за первым сектор с углом α, за вторым – с углом β и за третьим – с углом γ. Играют парами, но по очереди: первый со вторым, второй с третьим и третий с первым. Волчок раскручивают и смотрят, в каком положении он остановится. Чей сектор окажется напротив риски, тот и проиграл.

Будем измерять углы α, β и γ в долях полного оборота, так что $\alpha+\beta+\gamma=1$. Тогда вероятность проигрыша первого игрока второму равна α, второго третьему – β и третьего первому – γ.

Обозначим p_1, p_2 и p_3 соответственно вероятности выигрыша первого игрока у второго, второго у третьего и третьего у первого:

$$p_1 = 1-\alpha,\ \ p_2 = 1-\beta,\ \ p_3 = 1-\gamma .$$

При $\alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ каждая из вероятностей p_1, p_2 и p_3 больше 1/2, то есть игра нетранзитивная. Например, если секторы одинаковые ($\alpha = \beta = \gamma = 1/3$), то

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$

У игры с волчком есть свойство: сумма вероятностей выигрышей всегда равна 2:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1-\alpha + 1-\beta + 1-\gamma = 3-\left(\alpha+\beta+\gamma\right) = 2 .$$

Предположим, что игроки делят банк размером 1, играя друг с другом по кругу: первый со вторым, второй с третьим, третий с первым, потом опять первый со вторым и так далее. Причем в каждой игре разыгрывается одинаковая сумма, много меньшая, чем 1.

Тогда математическое ожидание доли S_1 первого игрока равно трети суммы вероятностей выиграть у второго p_1 и у третьего $(1-p_3)$. Аналогично определяются ожидаемые доли других игроков:

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{1+p_1-p_3}{3}, \\ S_2 = \dfrac{1+p_2-p_1}{3}, \\ S_3 = \dfrac{1+p_3-p_2}{3}. \end{cases} \tag{1}$$

Если мы хотим разделить банк в заранее заданном отношении $S_1 : S_2 : S_3$ ($S_3 = 1 - S_1 - S_2$), то можно найти нужные p_1, p_2 и p_3, решив систему (1) совместно с условием $p_1 + p_2 + p_3 = 2$:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{2}{3} + S_1 - S_2, \\ p_2 = -\dfrac{1}{3} + S_1 + 2S_2, \\ p_3 = \dfrac{5}{3} - 2S_1 - S_2. \end{cases} \tag{2}$$

Теперь, чтобы ответить на вопрос, можно ли получить доли S_1 и S_2 в нетранзитивной игре, можно подставить S_1 и S_2 в систему (2), найти вероятности и проверить, выполняются ли условия нетранзитивности

$$\frac{1}{2} < p_1 \le 1,\ \frac{1}{2} < p_2 \le 1,\ \frac{1}{2} < p_3 \le 1. \tag{3}$$

Если подставить вероятности из уравнений (2) в условия (3) и решить полученную систему неравенств, можно определить все множество возможных пар (S_1, S_2). На рис. 1 изображено решение системы.

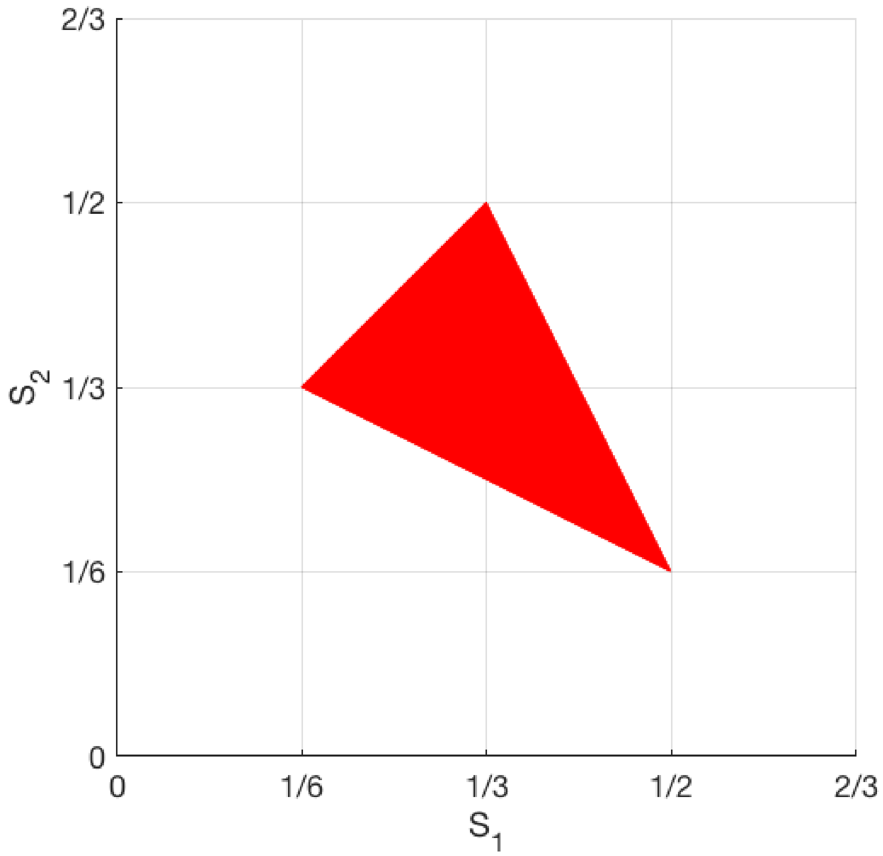


Рис. 1. Решение системы (3) относительно S_1 и S_2.

Если точка (S_1, S_2) находится внутри красного треугольника, то нетранзитивная игра с волчком для таких долей существует. Достаточно сделать на диске волчка углы

$$\alpha = \frac{1}{3} - S_1 + S_2, \quad \beta = \frac{4}{3} - S_1 - 2S_2, \quad \gamma = 1 - \alpha - \beta. \tag{4}$$

Нетранзитивные кости

Потренировавшись с волчком, можно приступить к нетранзитивным костям. Существуют ли такие нетранзитивные кости, что при игре по кругу каждого со следующим получатся заранее заданные ожидаемые доли выигрыша S_1, S_2 и S_3? Имеется в виду, что у каждого игрока своя кость, и он использует в игре только ее.

Будем рассматривать наборы из трех шестигранных костей: первая кость играет со второй, вторая с третьей, третья с первой. Вероятности выигрышей - p_1, p_2 и p_3 соответственно. Для исключения ничьих примем, что на гранях разных костей не может быть одинаковых чисел. Более того, можно считать, что все 18 чисел различны, а именно, что каждое число от 1 до 18 встречается ровно один раз. Для простоты рассуждений ограничимся именно такими наборами.

Нам понадобится упрощенно представлять набор костей последовательностью их номеров. Построим такую последовательность на примере следующего набора костей.

	2					12					18		
16	15	14	13		11	10	9	8		6	5	4	3
	1					7					17		
Кость 1					Кость 2					Кость 3			

Рис. 2. Развертки трех костей

Разрежем развертки на отдельные грани и расположим эти грани в строке в порядке убывания чисел на них.

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Теперь для вычисления вероятностей выигрыша числа на гранях не нужны, ведь каждая грань бьет любую грань другой кости, стоящую правее. Поэтому числа на гранях заменим номерами костей, на которых эти грани находятся. Получается *представление* набора костей последовательностью номеров этих костей.

3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1

Рис.3. Пример представления набора костей

Такого представления достаточно для определения вероятностей p_1, p_2 и p_3. Например, чтобы найти p_1, надо для каждой единицы в последовательности найти количество двоек, стоящих правее этой единицы, сложить все эти числа и разделить на произведение количеств единиц и двоек:

$$p_1 = \frac{4\cdot 6}{6\cdot 6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \qquad p_2 = \frac{6\cdot 4}{6\cdot 6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \qquad p_3 = \frac{2\cdot 6 + 4\cdot 2}{6\cdot 6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

По представлению костей всегда можно восстановить набор костей[1] с заданными вероятностями выигрышей p_1, p_2 и p_3. Для этого достаточно пронумеровать числа представления слева направо в порядке убывания и нанести номера единиц на грани первой кости, номера двоек на грани второй и номера троек на грани третьей.

Если в представлении поменять местами соседние неравные номера, то одна из вероятностей p_1, p_2 и p_3 изменится на 1/36. Например, если в

[1] Единственный с точностью до перестановок граней на каждой отдельной кости.

представлении, изображенном на рис.3, четвертая единица «перепрыгнет» двойку слева направо (рис. 4), получится новая последовательность и новый набор костей, в которой количество фрагментов (12) уменьшится на 1, и, значит, вероятность p_1 уменьшится на 1/36 и станет равна 24/36 – 1/36 = 23/36. Вероятности p_2 и p_3 при этом не изменятся.

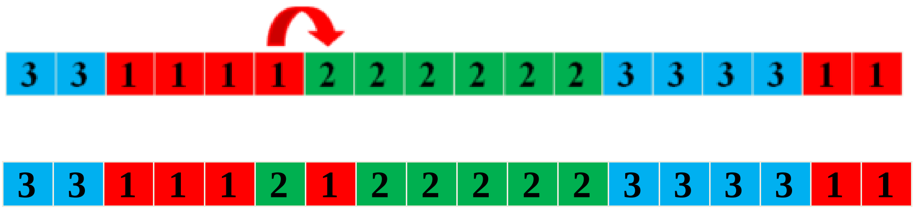
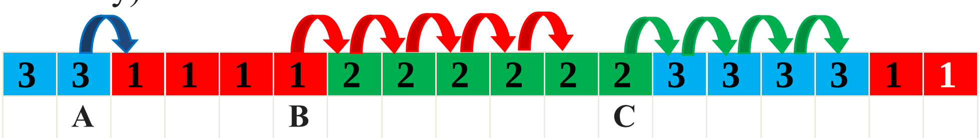


Рис. 4.

Таблица возможных перестановок соседних номеров

Перестановка	Результат	
$(12) \to (21)$	$p_1 \to p_1 - \dfrac{1}{36}$	p_2, p_3 не меняются
$(13) \to (31)$	$p_3 \to p_3 + \dfrac{1}{36}$	p_1, p_2 не меняются
$(23) \to (32)$	$p_2 \to p_2 - \dfrac{1}{36}$	p_3, p_1 не меняются
$(21) \to (12)$	$p_1 \to p_1 + \dfrac{1}{36}$	p_2, p_3 не меняются
$(31) \to (13)$	$p_3 \to p_3 - \dfrac{1}{36}$	p_1, p_2 не меняются
$(32) \to (23)$	$p_2 \to p_2 + \dfrac{1}{36}$	p_3, p_1 не меняются

Переставим в представлении с вероятностями $p_1 = \dfrac{24}{36}$, $p_2 = \dfrac{24}{36}$, $p_3 = \dfrac{20}{36}$ тройку из позиции A не более чем на 1 шаг вправо, единицу из позиции B – не более чем на 5 шагов вправо, а двойку из позиции C – не более чем на 4 шага вправо (см. схему).



Получится одно из 60 представлений с вероятностями

$$p_1 \in \left\{\frac{24}{36}, \frac{23}{36}, \frac{22}{36}, \frac{21}{36}, \frac{20}{36}, \frac{19}{36}\right\},\quad p_2 \in \left\{\frac{24}{36}, \frac{23}{36}, \frac{22}{36}, \frac{21}{36}, \frac{20}{36}\right\},\quad p_3 \in \left\{\frac{20}{36}, \frac{19}{36}\right\}. \quad (5)$$

Среди 60 полученных наборов есть девять пар, которые получаются друг из друга циклической перестановкой $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Поэтому, если считать различными только те наборы нетранзитивных костей, у которых вероятности не могут перейти друг в друга циклическим переименованием костей, то получается 51 различный набор костей.

***

У нетранзитивных костей нет свойства $p_1 + p_2 + p_3 = 2$, как у волчка. Например, суммы вероятностей из (5) могут быть от $\frac{58}{36}$ до $\frac{68}{36}$. Но зато верна следующая теорема.

Теорема. Для трех шестигранных нетранзитивных костей выполняется неравенство

$$p_1 + p_2 + p_3 \leq \frac{17}{9}. \tag{6}$$

Для доказательства нам понадобится различать представления по количеству идущих подряд групп одинаковых номеров. Вот пример представления, содержащего пять групп.

3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1
Гр.1		Группа 2				Группа 3						Гр.4				Гр.5	

Назовем представление (и соответствующий набор) *оптимальным*[2], если сумму вероятностей нельзя увеличить, поменяв местами два каких-нибудь соседних номера. В оптимальном представлении не встречаются фрагменты (21), (32) и (13). Действительно, если какая-нибудь из этих пар есть, номера в ней можно поменять местами, при этом одна из вероятностей p_1, p_2 и p_3 увеличится на 1/36.

Любое представление можно сделать оптимальным, меняя местами номера в парах (21), (32) и (13), пока ни одной такой пары не останется. При этом ни одна из вероятностей p_1, p_2 и p_3 не уменьшится, то есть нетранзитивные кости останутся нетранзитивными. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любого набора костей существует оптимальный набор с не меньшей суммой вероятностей, и для любого нетранзитивного набора костей существует оптимальный нетранзитивный набор с не меньшими вероятностями p_1, p_2 и p_3.

Для доказательства теоремы понадобятся еще четыре вспомогательных утверждения, доказательства которых даны в конце эссе.

[2] Термин заимствован из [1].

Утверждение 2. Для любого оптимального набора из трех костей с числом групп $n > 3$ в представлении найдется оптимальный набор из трех костей с числом групп $n-1$ и не меньшей суммой вероятностей $p_1 + p_2 + p_3$.

То есть с увеличением числа групп максимально возможная сумма вероятностей оптимального набора костей не возрастает.

Утверждение 3. Максимальная сумма вероятностей для оптимального набора из трех шестигранных костей с количеством групп больше пяти равна 67/36.

Утверждение 4. В представлении любого набора из трех нетранзитивных костей не менее 5 групп.

Утверждение 5. Максимальная сумма вероятностей для трех нетранзитивных шестигранных костей с представлением из пяти групп равна 17/9.

Доказательство теоремы. Возьмем произвольный нетранзитивный набор из трех шестигранных костей. Сделаем, если нужно, его представление оптимальным, меняя местами номера во фрагментах (21), (32) и (13). При этом нетранзитивность сохранится, сумма вероятностей может только увеличиться.

В полученном оптимальном нетранзитивном наборе меньше пяти групп быть не может (утверждение 4). Если групп ровно 5, то сумма вероятностей не больше, чем 17/9 (утверждение 5). Если групп больше пяти, то сумма вероятностей нового набора не больше, чем 67/36 (утверждение 3).

Мы взяли произвольные нетранзитивные кости, преобразовали их, не уменьшив сумму вероятностей, при этом она оказалась не больше 17/9. Значит у любых нетранзитивных костей сумма вероятностей не больше 17/9.

Пример нетранзитивных костей, для которых достигается максимально возможная сумма вероятностей, показан на рис.2.

***

Конечно, для костей остаются верны система уравнений (2) и условия (3), полученные для волчка. Из условия $p_1 + p_2 + p_3 = R$ и системы (2) можно найти вероятности, при которых получатся заданные доли S_1, S_2:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{R}{3} + S_1 - S_2, \\ p_2 = \dfrac{R}{3} - 1 + S_1 + 2S_2, \\ p_3 = \dfrac{R}{3} + 1 - 2S_1 - S_2. \end{cases} \tag{7}$$

Подставляя уравнения (7) в условия (3), получим систему неравенств, связывающих S_1 и S_2. На рис. 4 показаны решения, найденные графически для нескольких R.

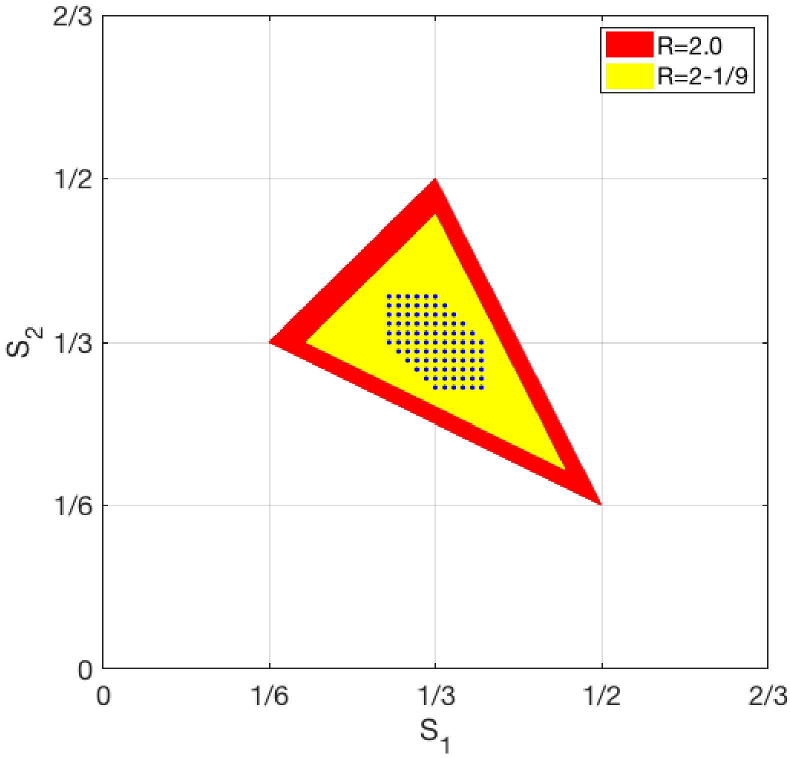


Рис. 4. Допустимые области для пар (S_1, S_2).

Решения для игры с волчком лежат внутри красного треугольника ($R=2$), для трех шестигранных костей с максимальным значением $R=\frac{17}{9}$ – внутри желтого.

Точки на рис. 4 соответствуют вероятностям из (5) и их циклическим перестановкам $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_1$. На графике 91 точка, одна из которых находится в центре треугольника и соответствует набору нетранзитивных костей с равными вероятностями $p_1 = p_2 = p_3$. Другие лежат в узлах сетки с шагом 1/108.

Можно ли распределить сумму на кону в отношении 1:2:3?

Для такого отношения игроки должны получить в среднем $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ части банка соответственно. Точки $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ являются вершинами красного треугольника (рис. 4), и они лежат вне разрешенного для костей желтого треугольника. Значит такое распределение долей с тремя нетранзитивными шестигранными костями невозможно.

Доказательства вспомогательных утверждений 2 – 5

Начиная с этого момента, будем для простоты и определенности считать, что кость, у которой на грани число 18 (наибольшее из всех на трех костях), имеет номер 1. Тогда все возможные представления начинаются с единицы, а в оптимальных представлениях группы чередуются в порядке 12312312… Здесь цифра 1 означает группу, состоящую из единиц, и т.д.

Представление	**1 1**	**2 2 2 2**	**3 3 3 3 3 3**	**1 1 1 1**	**2 2**
Номер группы по порядку	1	2	3	4	5
Обозначение группы и ее длина	$x_1=2$	$y_1=4$	$z_1=6$	$x_2=4$	$y_2=2$

Доказательство утверждения 2. В оптимальном представлении расставим скобки, заключив в них фрагменты, состоящие из трех последовательных групп (123), и последний фрагмент из одной или двух групп, если он есть. Получается одно из трех разбиений

$$(123)(123)...(123),\quad (123)(123)...(123)(12) \text{ или } (123)(123)...(123)(1).$$

Обозначим x_j, y_j и z_j первую, вторую и третью группы в j-й скобке. Эти обозначения будем применять не только для самих групп, но и для их длин, поскольку путаницы здесь не возникнет[3]. В таблице выше показан пример.

Тогда представление можно записать $x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3\dots$. Рассмотрим три случая в зависимости от того, какой группой оканчивается представление.

Случай 1. Представление оканчивается группой z: $x_1y_1z_1x_2y_2z_2...x_k\ y_kz_k$, общее число групп равно $n=3k$, где $k\geq 2$.

а) Если $x_1\leq y_1$ то $x_2+x_3+...+x_k\geq y_2+y_3+...+y_k$. Перенесем группу z_k влево, объединим ее с группой z_1 и объединенную группу снова назовем z_1

$$x_1y_1\,\mathbf{z_1z_k}\ x_2y_2z_2...x_k\ y_k\rightarrow x_1y_1\mathbf{z}_1x_2y_2z_2...x_k\ y_k.$$

Получится оптимальный набор с не меньшей суммой вероятностей и количеством групп $n-1$. Сумма вероятностей не уменьшается, так как каждая тройка из самой правой группы «перешагивает», двигаясь справа налево, не меньше единиц, чем двоек. Значит, вероятность p_3 выросла не меньше, чем уменьшилась вероятность p_2.

---

[3] Для длины группы можно было бы ввести дополнительное обозначение вида $l(x_n)$ или $|x_n|$, но это лишь усложнит запись, не добавив строгости. Один и тот же символ часто используется и для объекта, и для его меры. Например, в геометрии длину отрезка *a* обозначают тоже *a*, и это ни у кого не вызывает недоумения.

б) Если $x_1 > y_1$, то перенесем z_n из конца в начало представления:

$$\boldsymbol{z_n}\ x_1y_1z_1x_2y_2z_2...x_ky_k$$

Представление остается оптимальным, число групп не изменилось. Сумма вероятностей тоже не изменилась, так как вероятность p_3 выросла ровно на столько, на сколько уменьшилась вероятность p_2. Теперь первой оказалась группа троек. Циклически переименуем кости (и, стало быть, группы) и снова получим представление $x_1y_1z_1x_2y_2z_2...x_ky_kz_k$.

Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока на каком-то шагу не окажется, что $x_1 \le y_1$, а это обязательно произойдет: невозможно, чтобы было $x_1 > y_1 > z_1 > ... > x_{k+1} > y_{k+1} > z_{k+1} > x_1$. Когда выполнится условие $x_1 \le y_1$, применим процедуру из пункта (а) и получим оптимальные кости с количеством групп $n-1$ и суммой вероятностей, не меньшей, чем была.

Случай 2. Представление оканчивается группой x: $x_1y_1z_1x_2y_2z_2...x_{k+1}$, общее число групп равно $n = 3k+1$, где $k \ge 1$.

В этом случае между группами x_1 и x_{k+1} находится поровну двоек и троек, поэтому группу x_{k+1} можно перенести влево и объединить с группой x_1 без изменения суммы вероятностей:

$$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}+1}\,y_1z_1x_2y_2z_2...z_k \to \boldsymbol{x}_1y_1z_1x_2y_2z_2...z_k.$$

После слияния x_1 и x_{k+1} в одну новую группу x_1 получается оптимальный набор костей, где сумма вероятностей прежняя, а число групп равно $n-1$.

Случай 3. Представление оканчивается группой y: $x_1y_1z_1x_2y_2z_2...x_{k+1}y_{k+1}$, общее число групп равно $n = 3k+2$, где $k \ge 1$.

Между группами y_1 и y_{k+1} заключены все группы z и все группы x, кроме x_1. Поэтому единиц между y_1 и y_{k+1} меньше, чем троек. Перенесем группу y_{k+1} влево и сольем с группой y_1:

$$x_1\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}+1}z_1x_2y_2z_2...x_{k+1} \to x_1\boldsymbol{y}_1z_1x_2y_2z_2...x_{k+1}.$$

Получается оптимальный набор из $n-1$ групп, а сумма вероятностей выросла.

Все случаи исчерпаны. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 3. Вначале докажем, что для трех оптимальных шестигранных костей с шестью группами в представлении максимальная сумма вероятностей равна 67/36.

Представление является оптимальным, поэтому группы чередуются в порядке 123123. Обозначим длины первых трех групп x, y и z. Тогда длины всех шести последовательно расположенных групп равны

$$x, y, z, (6-x), (6-y) \text{ и } (6-z).$$

Все группы не пустые: $1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 5,\ 1 \le z \le 5$, поэтому

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{6x + (6-x)(6-y)}{36} = \dfrac{36 - 6y + xy}{36}, \\ p_2 = \dfrac{6y + (6-y)(6-z)}{36} = \dfrac{36 - 6z + yz}{36}, \\ p_3 = \dfrac{z(6-x)}{36} = \dfrac{6z - zx}{36}. \end{cases}$$

Сумма вероятностей равна

$$R = p_1 + p_2 + p_3 = 2 + \frac{y(z + x - 6) - zx}{36}.$$

Рассмотрим три случая в зависимости от знака выражения $z + x - 6$.

Случай 1: $z + x - 6 > 0$. Тогда R растет с ростом y, поэтому максимум будет при $y = 5$. Перебором возможных значений x и z найдем наибольшее значение выражения $5z + 5x - zx - 30$. Поскольку выражение симметрично, можно считать, что $x \le z$.

x	2	3	3	4	4	5
z	5	4	5	4	5	5
$5z + 5x - zx - 30$	–5	–7	–5	–6	–5	–5

Случай 2: $z + x - 6 = 0$. Наибольшее значение выражения $-zx$ равно -5 и достигается, например, при $x = 1,\ z = 5$.

Случай 3: $x + z - 6 < 0$. R убывает с ростом y, поэтому наибольшее значение R принимает при $y = 1$. Найдем наибольшее значение выражения $z + x - 6 - zx$ перебором. Снова пользуясь симметричностью, ограничимся условием $x \le z$.

x	1	1	1	1	2	2
z	1	2	3	4	2	3
$z + x - 6 - zx$	–5	–5	–5	–5	–6	–7

Во всех трех случаях наибольшее значение R равно $2 - \dfrac{5}{36} = \dfrac{67}{36}$.

В соответствии с утверждением 2 сумма вероятностей оптимальных наборов костей не возрастает с ростом числа групп. Значит, сумма вероятностей выигрыша оптимальных костей с представлением из шести и более групп не превосходит 67/36. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 4. Меньше трех групп быть не может, так как костей три. Если групп три, то самая правая не бьет никакую другую: $p_3 = 0$, и поэтому набор не является нетранзитивным.

Предположим, что групп четыре. Тогда две из них содержат все грани двух соответствующих костей. Две оставшиеся группы содержат все грани третьей кости. Если представление, в котором четыре группы, начинается с номера 1, то и заканчиваться оно должно номером 1, поскольку в противном случае кость 3 не может выигрывать у кости 1. Получается единственный возможный случай последовательности групп 1231.

Представление	1	...	1	2	...	2	3	...	3	1	...	1
Длина группы	x_1			$y_1 = N_2$			$z_1 = N_3$			x_2		

Здесь N_1, N_2 и N_3 – количества граней у костей 1, 2 и 3 соответственно, и x_1, y_1, z_1 и x_2 – длины групп с первой по четвертую.

Тогда

$$p_1 + p_3 = \frac{x_1 y_1}{N_1 N_2} + \frac{z_1 x_2}{N_3 N_1} = \frac{x_1 N_2}{N_1 N_2} + \frac{N_3 x_2}{N_3 N_1} = \frac{x_1 + x_2}{N_1} = \frac{N_1}{N_1} = 1.$$

Раз так, то числа p_1 и p_3 не могут одновременно быть больше 0,5, а это противоречит нетранзитивности.

Таким образом, групп не меньше пяти. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 5. Если представление из пяти групп задает нетранзитивные кости с максимальной суммой вероятностей, то это представление правильное: группы следуют в порядке 12312. В противном случае представление получилось бы неоптимальным, а это противоречит тому, что сумма вероятностей максимальная.

Значит, третья по счету группа содержит шесть граней, поэтому имеет длину 6. Обозначим длины первых двух групп x и y. Тогда длины групп в порядке их следования таковы:

$$x, y,\ 6,\ (6-x),\ (6-y)\ .$$

Получаем систему

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{6x + (6-x)(6-y)}{36}, \\ p_2 = \dfrac{6y}{36}, \\ p_3 = \dfrac{6(6-x)}{36}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} p_1 = 1 - \dfrac{6y - xy}{36}, \\ p_2 = \dfrac{y}{6}, \\ p_3 = 1 - \dfrac{x}{6}. \end{cases}$$

Условия нетранзитивности (3) принимают вид:

$$\begin{cases} 18-6y+xy>0, \\ y>3, \\ x<3. \end{cases}$$

Проверим выполнение этих условий при всех возможных x, y.

x	1	1	2	2
y	4	5	4	5
$18-6y+xy$	-2	-7	2	-2

Единственное целое решение $x=2,\ y=4$. При этом

$$p_1+p_2+p_3=2+\frac{x(y-6)}{36}=2-\frac{2\cdot 2}{36}=\frac{17}{9}.$$

Утверждение доказано.

Ссылки по теме

1. И. И. Богданов, «Нетранзитивные рулетки», Математическое просвещение, сер. 3, 14, Изд-во МЦНМО, М., 2010, 240–255, http://www.mathnet.ru/links/ccde4171b6a00a71d9b1cd78bc4e51c8/mp346.pdf
2. М. Гарднер. Нетранзитивные парадоксы. В кн. «Путешествие во времени». М.: Мир, 1990.

Ожогин Михаил

Взаимовыгодная лотерея

эссе

Для того чтобы устроить лотерею, которая будет привлекательна одновременно и для устроителя, и для игрока, необходимо, чтобы одновременно выполнялись два обязательных условия: превышение цены билета над математическим ожиданием выигрыша и высокая вероятность выигрыша. Если мы проводим лотерею с обязательным выигрышем в каждом билете, то при условии превышения цены билета над математическим ожиданием покупатель потеряет на каждом билете разницу между стоимостью и математическим ожиданием. Такая лотерея, с одной стороны, привлекательна для покупателя, так как гарантирует выигрыш покупателя, с другой стороны, является ограничивающим фактором, так как не обеспечивает получение дохода. Значит, вероятность выигрыша должна быть менее 1, но максимально большая (как минимум в каждом втором билете). Ограничиваем вероятность выигрыша пределами от 0,9 до 0,99; при таких показателях устроитель гарантирует себе доход от продажи лотереи, а покупатель – высокую вероятность покупки лотереи с выигрышем и при этом с доходом от участия в лотерее. Именно такую лотерею можно назвать взаимовыгодной. Самый оптимальный пример взаимовыгодной лотереи.

Количество билетов в продаже: 100 билетов.
Стоимость одного билета 100 руб.
Приз в одном выигрышном билете: 9999: 99 = 101 руб.
Математическое ожидание выигрыша 99,99 руб.
Вероятность выигрыша 0,99.
Доход устроителя: $(100-99,99)\cdot 100 = 1\,\text{руб}$.
Количество выигрышных билетов: $100\cdot 0,99 = 99$.
Призовой фонд 9999 руб.

То есть один участник окажется без выигрыша, а стоимость купленного им билета составит доход остальных участников акции и доход устроителя от проведения акции. Стоимость билета без выигрыша будет частично направлена в призовой фонд и составит доход покупателя сверх стоимости купленного им билета. В билете без выигрыша 1 рубль – это доход устроителя, а 99 руб. – доход остальных участников акции.

Выгодная лотерея для устроителя – это лотерея, приносящая прибыль устроителю, то есть призовой фонд должен быть ниже выручки от реализации билетов.

Выгодная лотерея для игрока – это лотерея с высокой вероятностью выигрыша, в которой затраты на приобретение билета ниже выигрыша в каждом билете.

Комментарий. Действительно, превышение стоимости билета над математическим ожиданием выигрыша не исключает высокую вероятность выигрыша, превышающую стоимость билета. Михаил предложил немного экстремальную лотерею, которая в реальности не может существовать, поскольку из выручки устроители оплачивают печать и распространение билетов, налоги, сборы, аренду и обслуживание помещений и т.д. Тем не менее, как иллюстрация существования взаимовыгодной лотереи, этот пример довольно яркий.