

XII ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ. ОСНОВНОЙ (ЗАОЧНЫЙ) ТУР

Уважаемые участники, благодарим вас за интерес к нашей науке. Будем рады прочесть ваши сочинения и решения задач. Мы традиционно предлагаем 3 эссе на заданные темы и 16 задач.

Эссе – сочинение или даже небольшая статья на заданную тему. Эссе должно быть аргументированным и понятным. Лучшие эссе участников будут опубликованы в сборнике олимпиадных задач, а также возможна публикация в журнале «Математика».

Уважаемые участники олимпиады, мы ждём от вас полных и аккуратно написанных эссе и решений задач. У вас достаточно времени, чтобы задавать вопросы, консультироваться в интернете, читать книжки. Опубликованные решения задач олимпиад прошлых лет тоже могут помочь.

Задачи в нашей олимпиаде разные – от совсем простых до весьма сложных. Мы указываем, на школьников какого возраста рассчитана каждая задача, но это – лишь ориентир. Любой участник может решать любую задачу. Разница в возрасте будет учитываться лишь при определении победителей.

Эссе и решения задач просим прислать до 24 марта включительно в общеизвестном текстовом или графическом формате (doc, docx, pdf, jpg и т.п.). Адрес: prob-in-school@yandex.ru

Другой способ – бумажное письмо: 119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11. С пометкой «Олимпиада по теории вероятностей». Принимаются решения, отправленные до 24 марта включительно (по почтовому штемпелю).

I. Эссе

1. Выигрышная стратегия. В купоне лотереи «6 из 45» участник зачёркивает шесть из 45 номеров (см. рисунок); порядок значения не имеет, но все выбранные числа разные. Во время тиража случайным образом определяются шесть выигрышных номеров.

В интернете опубликован способ, который, как утверждается, «существенно увеличивает вероятность выигрыша». Автор метода пишет следующее.

«Несложно доказать, что среди выигрышных комбинаций чаще встречаются комбинации с тремя чётными и тремя нечётными номерами, чем комбинации с другим соотношением количества чётных и нечётных. Поэтому игрок, который выбирает комбинацию с тремя чётными и тремя нечётными номерами, имеет большие шансов выиграть по сравнению с тем, кто выбирает номера совершенно случайным образом, не заботясь о том, сколько чётных и нечётных номеров окажется в выбранной комбинации.»



Насколько соответствует действительности это заявление? Правда ли, что, придерживаясь стратегии «чётных и нечётных номеров поровну», можно увеличить шансы на выигрыш? Или это неправда? Всё ли в этом рассуждении неверно? Напишите небольшое эссе, где попытайтесь подробно и убедительно проанализировать предложенную стратегию и сделать выводы.



2. Симметризация кости. Пират Питер предлагает пирату Биллу сыграть в кости, пока на море штиль и делать нечего. Кости у них есть, но одна из них очень старая, края неровные. И вообще, она жульническая – вероятности выпадения разных граней разные. Ситуацию нужно исправить.

Питер предложил подровнять кость напильником, правда тогда она уменьшится. Билл немного подумал и сказал, что ничего пилить не нужно, мол, есть математический способ, как с помощью несимметричной кости добиться почти или даже совсем равных вероятностей получения 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков.

Что мог придумать Билл? Мы знаем, что прежде Билл преподавал теорию вероятностей в университете, но потом захотел тихой, спокойной жизни и пошёл в пираты. Напишите подробное и взвешенное сочинение на эту тему. Хорошо бы не только описать метод, но и получить количественные оценки. Например, можно ли (и как) сделать так, чтобы вероятности получения наиболее и наименее вероятного числа отличались бы менее чем на 0,01 или на 0,001? А может быть удастся сделать числа от 1 до 6 равновероятными?

3. Задача замечательного математика. Один замечательный математик решил следующую замечательную задачу.

Внутри круга отмечена точка M , а на границе круга независимо друг от друга выбраны три случайные точки A , B и C . Какова вероятность того, что треугольник ABC «накроет» точку M , то есть точка M будет принадлежать треугольной области ABC ?

Сначала математик решил задачу в случае, когда точка M – центр круга. Вероятность оказалась равна 0,25. Потом математик доказал, что эта вероятность не зависит от положения точки M внутри круга. Вот это доказательство.

Доказательство. Пусть точка M разбивает диаметр круга KL на неравные отрезки $KM = a$ и $ML = b$ (см. рис.1). Выберем на границе круга три случайные точки A , B и C .

Построим треугольник KSL со стороной $KL = a + b$ и отношением сторон $SK : SL = a : b$. Тогда отрезок SM служит биссектрисой этого треугольника. Построим равнобедренный треугольник ESD так, что точки E и D лежат на лучах SK и SL соответственно. На рис. 2 точки E и D лежат на продолжениях сторон SK и SL , но это не обязательно. Биссектриса SM угла ESD перпендикулярна отрезку ED и пересекает этот отрезок посередине в точке M_1 .

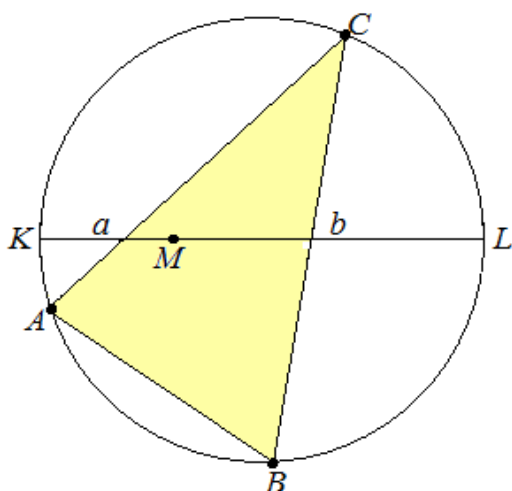


Рис. 1.

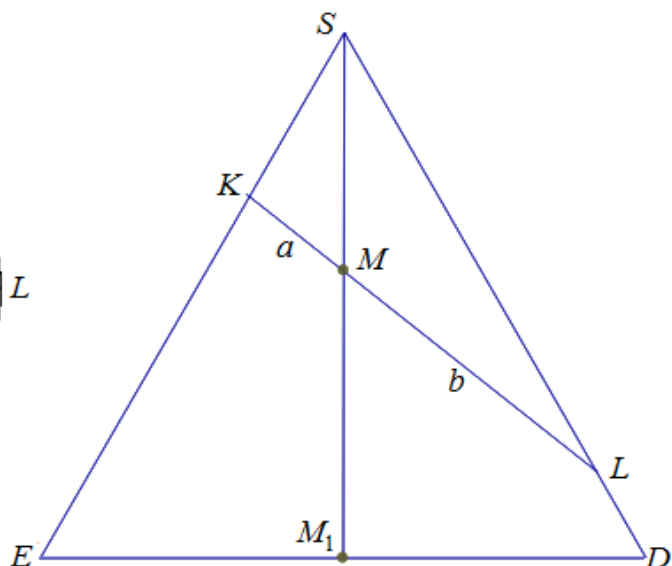


Рис. 2.

Теперь будем вращать треугольник ESD вокруг прямой SM_1 . Получится конус, в основании которого окружность с центром M_1 . Через прямую KL проведем плоскость, которая пересекает плоскость основания конуса по прямой, перпендикулярной диаметру ED . Сечение конуса этой плоскостью – эллипс, у которого отрезок KL является бóльшим диаметром (рис. 3).

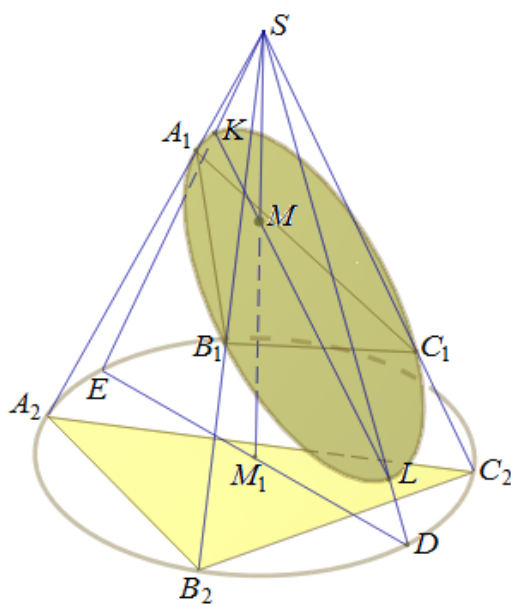


Рис. 3.

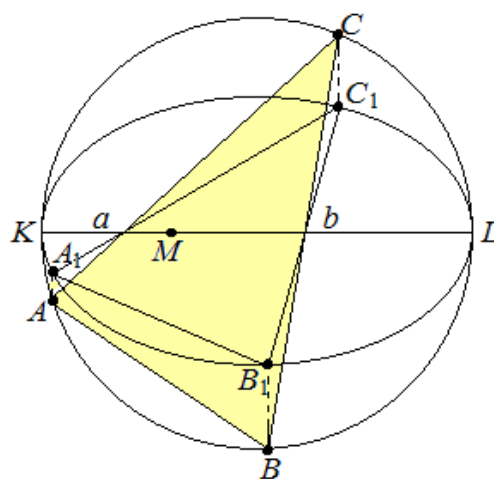


Рис. 4.

Вернёмся к первоначальному кругу и впишем в него эллипс, равный тому, что получился в конусе (рис.4). Параллельным проектированием точек A, B, C в направлении, перпендикулярном диаметру KL , получим на эллипсе точки A_1, B_1 и C_1 .

Отметим точки A_1, B_1 и C_1 на эллипсе, который является сечением в конусе, и спроектируем их из вершины S на окружность основания конуса в точки A_2, B_2 и C_2 .

Точки A, B и C – случайные точки на окружности, значит, точки A_1, B_1 и C_1 – случайно выбранные точки на эллипсе, а поэтому точки A_2, B_2 и C_2 – случайные точки на окружности основания конуса.

Точка M лежит внутри треугольника ABC тогда и только тогда, когда центр основания конуса M_1 лежит внутри треугольника $A_2B_2C_2$. Поэтому $P(M \in ABC) = P(M_1 \in A_2B_2C_2) = 0,25$.

Значит, вероятность того, что треугольник ABC накроет точку, лежащую внутри круга, всегда равна 0,25, независимо от выбора точки.

Рассуждение, безусловно, красивое и примечательное, но нет ли в нём ошибок? Если есть, то какие? Это первый вопрос.

Но есть и второй вопрос. Даже если математик где-то ошибся в решении, это не значит, что он ошибся в ответе. Может быть, вероятность действительно не зависит от выбора точки M внутри круга. Так зависит или нет?

Попробуйте разобраться в доказательстве, привлекая необходимые геометрические сведения, разобраться в вероятностной части рассуждения и подробно и убедительно ответить на эти два вопроса.

II. Задачи

4. Три броска (от 6-го класса. 1 балл). Одну игральную кость бросают три раза. Какое событие более вероятно:

- А «какое-то число очков выпадет хотя бы два раза» или
В «при трёх бросках выпадут три разных числа очков»?

5. Премия (от 6-го класса. 1 балл). В конце года директор фирмы выписал техническому отделу крупную премию. Начальник отдела хочет распределить премию между всеми десятью сотрудниками так, чтобы средний доход сотрудников отдела в декабре (с учётом и заработной платы, и премии) оказался наибольшим. Начальник думает, как ему поступить:

1. дать премию только двум самым малооплачиваемым сотрудникам;
2. дать премию только двум самым высокооплачиваемым сотрудникам;
3. разделить премию на всех поровну;
4. забрать всю премию себе;
5. поступить как-то иначе (как?)

Если вы выбрали какой-то вариант, объясните, почему именно этот вариант даст наибольший средний доход сотрудников отдела.

6. Остановившиеся часы (от 6-го класса. 1 балл). На часах две стрелки: часовая и минутная. В случайный момент часы остановились. Найдите вероятность того, что угол между стрелками на остановившихся часах острый.

7. Письма (от 6-го класса. 1 балл). В почтовом отделении курьер отправляет 100 писем. Письма весом больше 100 г не принимаются. Стоимость отправки зависит от веса письма. Минимальная стоимость (письма весом до 20 г включительно) равна 22 руб., за каждые следующие полные или неполные 20 г добавляется еще 2 руб. 50 коп. (см. таблицу).

Почтовые тарифы на простые письма	
Вес, г	Цена, р
до 20	22,00
от 21 до 40	24,50
от 41 до 60	27,00
от 61 до 80	29,50
от 81 до 100	32,00

Первая операционистка¹ на почте считает, что нужно взвесить по отдельности все 100 писем, найти стоимость отправки каждого по таблице, а потом все суммы сложить.

Вторая предлагает взвесить все письма сразу, найти средний вес письма, определить по таблице стоимость отправки и умножить результат на 100. Она говорит, что это даст ту же сумму, только быстрее. Права ли вторая операционистка?

¹ Служащая почтового отделения, выполняющая операции по отправке.

8. Отзывы (от 7-го класса. 1 балл).

Гневные отзывы о работе интернет-магазина оставляют 80% недовольных покупателей (тех, кого плохо обслужили в магазине). Из числа довольных покупателей положительный отзыв оставляют только 15%. Некоторый интернет-магазин заработал 60 гневных и 20 положительных отзывов. Пользуясь этой статистикой, оцените вероятность того, что очередной покупатель останется доволен обслуживанием в этом интернет-магазине.



9. Случайный выбор. Из натуральных чисел от 1 до n нужно выбрать k различных ($k < n$). Программист предлагает следующий алгоритм.

1. Все числа располагают по кругу (в вершинах n -угольника).
2. Первое число выбирается случайным образом.
3. Каждое следующее число выбирается независимо от предыдущих.

Если оно совпало с каким-то из уже выбранных, следует двигаться по часовой стрелке до первого невыбранного числа. В конце концов, получается k различных чисел.

а) (от 6-го класса. 1 балл). Верно ли, что появление каждого конкретного числа в такой выборке равновероятно?

б) (от 7-го класса. 1 балл). Верно ли, что появление всех выборок равновероятно?

10. Длина реки (от 8-го класса. 2 балла). Географическое общество Анчурии (GSA) отправило экспедицию, цель которой – измерение протяжённости русла великой анчурийской реки Рио-Коралио. Оказалось, что протяжённость русла от истока до устья равна 402 км плюс-минус 500 м, вероятность ошибки равна 0,04, причём ошибки в большую или меньшую сторону равновероятны.

Независимо от GSA агентство AWRA («Анчурийские водные ресурсы») провело своё исследование на эту тему. Результат: 403 км плюс-минус 500 м. Вероятность ошибки также равна 0,04, и, опять же, ошибки в большую и меньшую сторону равновероятны.

Когда результаты опросов сравнили и убедились, что ошибок в методах и в измерениях нет, президент GSA и директор AWRA совместно обратились к Рассеянному Учёному, который является признанным экспертом в области статистики, чтобы он объяснил расхождение. Учёный обрадовался и сказал: «Теперь я точно знаю протяжённость Рио-Коралио с малой вероятностью ошибки». Как он мог рассуждать? Найдите оценку и вероятность ошибки.



11. Платная дорога (от 8-го класса. 3 балла). Стоимость проезда по участку платной автодороги зависит от класса автомобиля: легковые автомобили относятся к первому классу, для них стоимость проезда 200 рублей, а лёгкие грузовые и микроавтобусы – ко второму, для них стоимость 300 рублей.

При въезде на пункт оплаты установлена автоматическая система, измеряющая высоту автомобиля. Если высота машины меньше некоторого порогового значения h , то система автоматически относит авто к классу 1, а если выше h , то к классу 2. При этом возможны ошибки. Например, низенький микроавтобус система может отнести к классу 1, и его водитель будет доволен. Легковой УАЗ может быть ошибочно отнесён к классу 2, и его водитель будет этому не рад. Он может подать заявку, и компания-оператор будет должна вернуть ему 100 рублей.

Руководство компании поставило перед инженерами задачу: настроить систему так, чтобы количество ошибок было наименьшим.

Несколько недель инженеры собирали данные о высоте автомобилей, проходящих через пункт оплаты. Отдельно – о машинах класса 1 и отдельно – о машинах класса 2 (рис. 5). На оси абсцисс отложена высота автомобиля (в см), на оси ординат – среднее количество машин такой высоты, проходящих через пункт за сутки. Для наглядности точки соединены плавной линией.

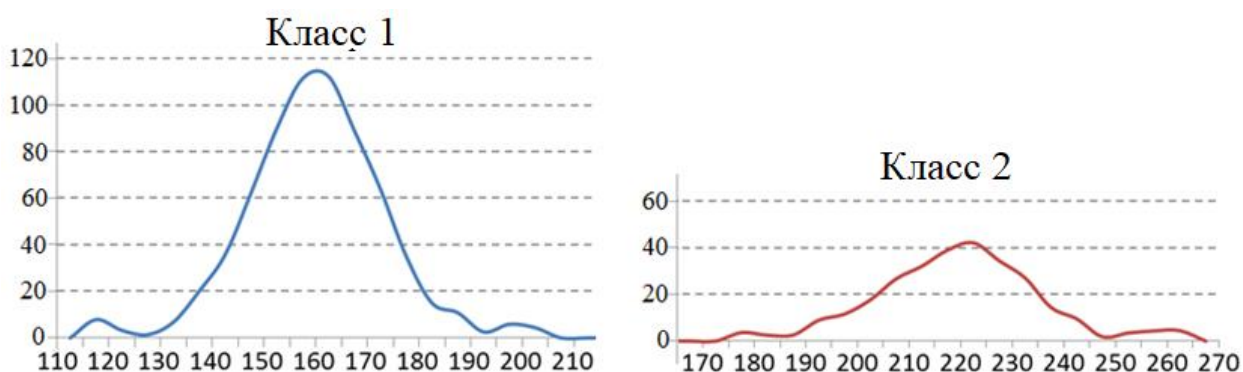


Рис. 5. Графики – количество машин класса 1 и класса 2 в сутки

Собрав всю эту информацию и начертив графики, инженеры задумались, что делать дальше: как найти пороговое значение h так, чтобы вероятность ошибки оказалась наименьшей возможной? Решите эту задачу для них.

12. Стрелы Ивана-Царевича (от 8-го класса. 3 балла). Иван-Царевич учится стрелять из лука. Он положил в колчан 14 стрел и пошёл стрелять по шишкам в лес. Он сбивает шишку с вероятностью 0,1, и за каждую сбитую шишку Царевна-Лягушка даёт ему ещё 3 стрелы. Стреляет Иван-Царевич до тех пор, пока стрелы у него не кончатся. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, которые сделает Иван-Царевич.



13. Случайный граф (от 8-го класса. 3 балла). На плоскости 20 точек были попарно связаны между собой отрезками (рёбрами)² – каждая точка с каждой другой. Затем случайным образом выбрали 35 рёбер и удалили их. Найдите вероятность того, что получившийся граф связан (то есть из любой точки можно дойти до любой другой по рёбрам).

14. Светофоры (от 9-го класса. 2 балла). Шоссе Долгое пересекается с улицей Узкой и с улицей Тихой (см. рис. 6). На обоих перекрёстках стоят светофоры. Первый светофор x секунд разрешает движение по шоссе, а полминуты – по ул. Узкой. Второй светофор две минуты разрешает движение по шоссе, а x секунд – по ул. Тихой. Светофоры работают независимо друг от друга. При каком значении x вероятность проехать по Долгому шоссе оба перекрёстка, не останавливаясь на светофорах, будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая вероятность?

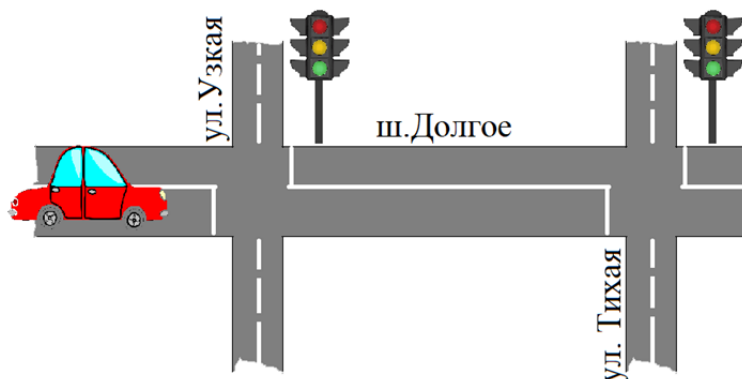


Рис. 6.

² Такую конструкцию, состоящую из точек и отрезков (прямых или кривых линий), связывающих некоторые из точек, в математике называют *графом*. Точки называют вершинами, а отрезки – рёбрами графа.



15. Кто богаче? (От 9-го класса. 4 балла). У кота Базилио и лисы Алисы не осталось ни сольдо. И тогда они нанялись ставить и убирать декорации в театре Карабаса-Барабаса. Каждый вечер после спектакля Карабас даёт им монету в один сольдо, и между котом и лисой немедленно начинается драка.

С вероятностью 0,25 побеждает кот и забирает монету себе, с вероятностью 0,25 побеждает лиса и забирает монету себе, а с веро-

ятностью 0,5 обоих отводят в полицию и отбирают у них все деньги (не только сегодняшние, а вообще все). Вопрос: на сколько сольдо у одного из компаньонов окажется больше, чем у другого к концу 10-го дня подработки (модуль разности их состояний)? Найдите математическое ожидание этой величины.

16. Пятьдесят карточек (от 9 класса, 3 балла). На стол в ряд выложили 50 карточек, пронумерованных слева направо числами от 1 до 50. Снизу карточки синие, а сверху – красные. Вася выбирает случайным образом 25 карточек, лежащих подряд (фрагмент ряда), и переворачивает их. Затем к столу подходит Ася и делает то же самое – выбирает случайный фрагмент из 25 карточек, лежащих подряд, и переворачивает их, независимо от того, что делал раньше Вася. У какой карточки (или карточек) вероятность оказаться красной стороной вверх после всех переворачиваний меньше, чем у других?

17. Три прогноза (От 9-го класса. 4 балла). Дни в Анчурии бывают ясные и дождливые, причём вероятность ясного дня равна 0,74 независимо от времени года. В парламенте Анчурии есть комитет по климату и прогнозам, где работают два сенатора и один приглашённый синоптик. Известно, что доля верных прогнозов ясных дней у каждого из трёх такая же, как и доля верных прогнозов дождливых. Но у синоптика эта доля на 50% выше, чем у каждого из сенаторов.

Однажды все трое независимо друг от друга сделали прогноз на приближающийся День Великого Народного Ликования. Оба сенатора заявили, что этот день будет ясный, а синоптик предсказал дождь. На какой прогноз лучше полагаться?

18. Парадокс последнего броска (от 9-го класса. 4 балла). Правильную игральную кость бросают до тех пор, пока сумма последовательно выпадающих очков не достигнет числа 2019 (станет равна 2019 или больше). Докажите, что вероятность события «при последнем броске выпадет 6 очков» больше³, чем $1/6$.

19. Одноцветные пары. В ящике n белых и n чёрных шаров. Шары достают из ящика по два шара за раз – случайными парами.

а) (от 9-го класса. 2 балла). Найдите математическое ожидание числа разноцветных пар, извлечённых из ящика к моменту, когда ящик опустел.

б) (от 9-го класса. 5 баллов). Предположим, что если пара разноцветная, то её откладывают в сторону, а если одноцветная, то её возвращают в ящик. Такую операцию назовём попыткой. Найдите математическое ожидание числа попыток, нужных, чтобы все шары были отложены в сторону, и в ящике ничего не осталось.

³ Утверждение задачи выглядит парадоксально – последний бросок ничем не хуже никакого из предыдущих и не зависит от них. Казалось бы, число 6 выпадает с вероятностью $1/6$ независимо от того, первый это бросок или последний.