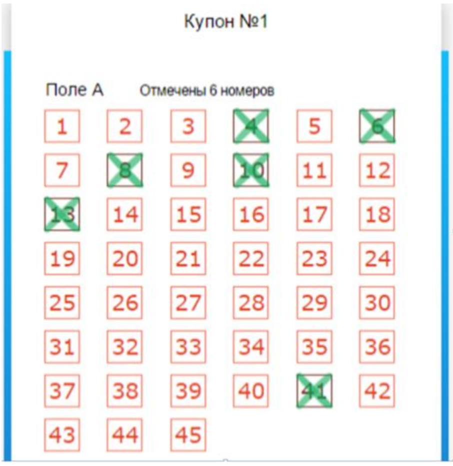
XII ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ. ОСНОВНОЙ (ЗАОЧНЫЙ) ТУР

Разбор предложенных эссе

1. Выигрышная стратегия. В купоне лотереи «6 из 45» участник зачёркивает шесть из 45 номеров (см. рисунок); порядок значения не имеет, но все выбранные числа разные. Во время тиража случайным образом определяются шесть выигрышных номеров.



В интернете опубликован способ, который, как утверждается, «существенно увеличивает вероятность выигрыша». Автор метода пишет следующее.

«Несложно доказать, что среди выигрышных комбинаций чаще встречаются комбинации с тремя чётными и тремя нечётными номерами, чем комбинации с другим соотношением количества чётных и нечётных. Поэтому игрок, который выбирает комбинацию с тремя чётными и тремя нечётными номерами, имеет больше шансов выиграть по сравнению с тем, кто выбирает номера совершенно случайным образом, не заботясь о том, сколько чётных и нечётных номеров окажется в выбранной комбинации.»

Насколько соответствует действительности это заявление? Правда ли, что, придерживаясь стратегии «чётных и нечётных номеров поровну», можно увеличить шансы на выигрыш? Или это неправда? Всё ли в этом рассуждении неверно? Напишите небольшое эссе, где попытайтесь подробно и убедительно проанализировать предложенную стратегию и сделать выводы.

Возможная идея эссе. Действительно, комбинаций, где чётных и нечётных номеров по три, больше, чем комбинаций с другим соотношением чётных и нечетных. Выяснить это не составляет труда. Таких комбинаций (обозначим их число $K_{3,3}$) всего

$$K_{3,3} = C_{23}^3 C_{22}^3,$$

и это число больше, чем, например,

$$K_{2,4} = C_{23}^2 C_{22}^4 = \frac{23!}{2!\cdot 21!}\cdot\frac{22!}{4!\cdot 18!} = \frac{3}{21}\cdot\frac{23!}{3!\cdot 20!}\cdot\frac{19}{4}\cdot\frac{22!}{3!\cdot 19!} = \frac{3}{21}\cdot\frac{19}{4}\cdot C_{23}^3 C_{22}^3 = \frac{19}{28}K_{3,3}.$$

Точно так же можно показать, что любое другое число комбинаций $K_{j,6-j}$, где $j \ne 3$, меньше, чем $K_{3,3}$. Так что в этой части автор «метода» прав.

Но что из того, что комбинаций «три-три» больше, чем других? Ровным счётом ничего. Это обстоятельство никак не повышает шансы того, кто придерживается стратегии «три-три».

Выигрышная комбинация с бóльшей вероятностью имеет три чётных и три нечётных номера, но и невыигрышных комбинаций с таким распределением больше, чем с любым другим. Вероятность того, что любая наперёд заданная комбинация окажется выигрышной равна $1/C_{45}^6$, независимо от того, сколько в ней чётных номеров и как они чередуются с нечётными.

Комментарий. К сожалению, не было ни одного эссе, где эти мысли прозвучали бы ясно и без ошибок. Было несколько сочинений, где авторы высказывали близкие мысли, но ошибались в подсчете числа комбинаций 3 – 3 или вероятностей получить такую комбинацию при случайном выборе. Максимальный балл за эссе по этой теме, что мы смогли поставить, был 3 из 10. Это означает, что эссе есть, и в нём немало слов.

2. Симметризация кости. Пират Питер предлагает пирату Биллу сыграть в кости, пока на море штиль и делать нечего. Кости у них есть, но одна из них очень старая, края неровные. И вообще, она жульническая – вероятности выпадения разных граней разные. Ситуацию нужно исправить.

Питер предложил подровнять кость напильником, правда тогда она уменьшится. Билл немного подумал и сказал, что ничего пилить не нужно, мол, есть математический способ, как с помощью несимметричной кости добиться почти или даже совсем равных вероятностей получения 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков.

Что мог придумать Билл? Мы знаем, что прежде Билл преподавал теорию вероятностей в университете, но потом захотел тихой, спокойной жизни и пошёл в пираты. Напишите подробное и взвешенное сочинение на эту тему. Хорошо бы не только описать метод, но и получить количественные оценки. Например, можно ли (и как) сделать так, чтобы вероятности получения наиболее и наименее вероятного числа отличались бы менее чем на 0,01 или на 0,001? А может быть удастся сделать числа от 1 до 6 равновероятными?

Эссе участника олимпиады Романа Трапезникова (Казань, 7 класс)[1]

Мы решили помочь Биллу и Питеру, и придумали, как с помощью любой кости (пусть даже и с неравными гранями) получать числа от 1 до 6 с равными вероятностями. Для этого мы бросаем кость три раза. Если хотя бы одно число очков выпало дважды, бросаем ещё три раза и продолжаем бросать по три раза до тех пор, пока не выпадет три различных числа очков[2].

Теперь заменим выпавшие очки их *рангами*, то есть числами 1, 2 и 3. Наименьшее выпавшее число очков заменяем числом 1, второе по величине – числом 2, а наибольшее – числом 3. Например, если выпала комбинация $(3,6,2)$, получается упорядоченная тройка $(2,3,1)$.

Заметим, что порядки полученных троек (их 6 штук – (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) и (3,2,1)) случаются с равной вероятностью, так как

[1] Эссе отредактировано, при этом мы старались сохранить авторский текст настолько, насколько это возможно.

[2] Роман предлагает действовать иначе. Он пишет: «Для этого мы бросаем кость до тех пор, пока не выпадет тройка идущих подряд различных чисел, то есть если выпала последовательность (1, 3, 3, 3, 5, 4), то считаем, что выпало (3,4,5)». Алгоритм Романа тоже интересен, но, к сожалению, не приводит к равновероятным исходам: например, комбинации (3,4,5) и (4,3,5) могут быть не равновероятны. Поэтому мы заменили способ бросания кости, сохранив основную идею.

каждая грань кости выпадает с одной и той же вероятностью, независимо от того, какой по счёту она выпало. То есть, если выпали очки a,b,c, вероятности которых p_a, p_b и p_c соответственно, то вероятность выпадения комбинации (a,b,c) равна $p_a p_b p_c$, а другой комбинации, например, (b,c,a) – $p_b p_c p_a$, только множители в другом порядке, а так это то же самое $p_a p_b p_c$.

Теперь установим соответствие между числами от 1 до 6 и упорядоченными тройками.

Число	1	2	3	4	5	6
Комбинация	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$

Для проведения эксперимента мы вылепили неправильную кость из солёного теста (рис. 1). Для определения относительной частоты (примерной вероятности) выпадения каждой грани мы бросили кость 100 раз и зафиксировали количество выпадений каждой грани. Результаты занесли в таблицу.

Рис. 1. Неправильная игральная кость

Число очков	1	2	3	4	5	6
Количество	15	31	10	7	24	13

Таким образом, мы убедились в том, что кость действительно неправильная. Вероятность выпадения 1 очка примерно равна 0,15, вероятность 2 очков – 0,31 и т.д.

Мы опробовали нашу кость в простой игре-бродилке. Игра удалась. Чтобы сделать ход, каждому игроку приходилось бросать кость 3 – 6 раз, что не очень затруднительно[3]. Вначале приходилось заглядывать в таблицу-шпаргалку перевода комбинаций в число очков. Потом эти комбинации запомнились.

Таким образом, Биллу и Питеру можно воспользоваться предложенным методом для игры в кости.

Замечание. Я бы все же воспользовался напильником, ведь даже если можно играть и так, то с правильной костью игра значительно ускорится.

[3] Математическое ожидание числа бросков равно 5,4.

3. Задача замечательного математика. Один замечательный математик решал следующую замечательную задачу.

Внутри круга отмечена точка M, а на границе круга независимо друг от друга выбраны три случайные точки A, B и C. Какова вероятность того, что треугольник ABC «накроет» точку M, то есть точка M будет принадлежать треугольной области ABC?

Сначала математик решил задачу в случае, когда точка M – центр круга. Вероятность оказалась равна 0,25. Потом математик доказал, что эта вероятность не зависит от положения точки M внутри круга. Вот это доказательство.

***Доказательство**. Пусть точка M разбивает диаметр круга KL на неравные отрезки $KM = a$ и $ML = b$ (см. рис.1). Выберем на границе круга три случайные точки A, B и C.*

Построим треугольник KSL со стороной $KL = a + b$ и отношением сторон $SK : SL = a : b$. Тогда отрезок SM служит биссектрисой этого треугольника. Построим равнобедренный треугольник ESD так, что точки E и D лежат на лучах SK и SL соответственно. На рис. 2 точки E и D лежат на продолжениях сторон SK и SL, но это не обязательно. Биссектриса SM угла ESD перпендикулярна отрезку ED и пересекает этот отрезок посередине в точке M_1.

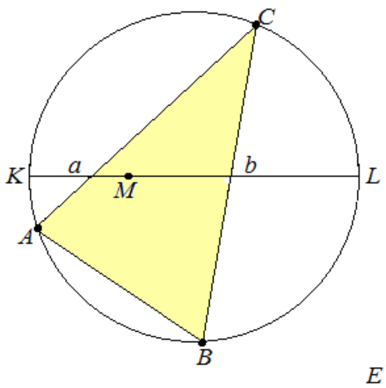


Рис. 1.

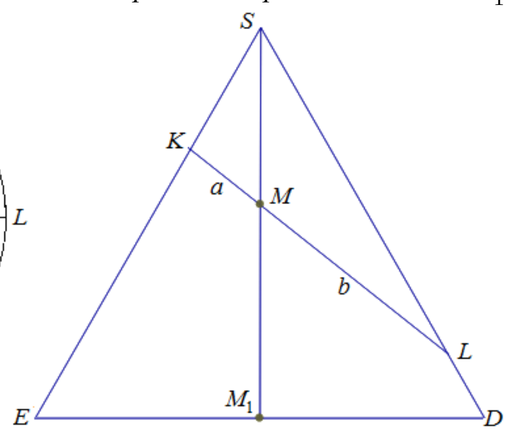


Рис. 2.

Теперь будем вращать треугольник ESD вокруг прямой SM_1. Получится конус, в основании которого окружность с центром M_1. Через прямую KL проведем плоскость, которая пересекает плоскость основания конуса по прямой, перпендикулярной диаметру ED. Сечение конуса этой плоскостью – эллипс, у которого отрезок KL является бо́льшим диаметром (рис. 3).

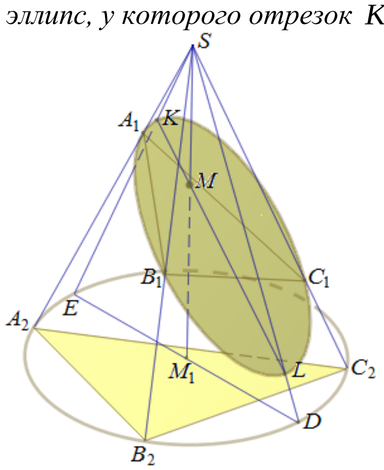


Рис. 3.

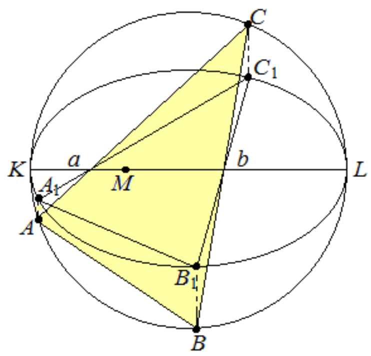


Рис. 4.

*Вернёмся к первоначальному кругу и впишем в него эллипс, равный тому, что получился в конусе (рис.*4*). Параллельным проектированием точек A, B, C в направлении, перпендикулярном диаметру KL, получим на эллипсе точки A_1, B_1 и C_1.*

Отметим точки A_1, B_1 и C_1 на эллипсе, который является сечением в конусе, и спроектируем их из вершины S на окружность основания конуса в точки A_2, B_2 и C_2.

Точки A, B и C – случайные точки на окружности, значит, точки A_1, B_1 и C_1 – случайно выбранные точки на эллипсе, а поэтому точки A_2, B_2 и C_2 – случайные точки на окружности основания конуса.

Точка M лежит внутри треугольника ABC тогда и только тогда, когда центр основания конуса M_1 лежит внутри треугольника $A_2B_2C_2$. Поэтому $\mathrm{P}(M \in ABC) = \mathrm{P}(M_1 \in A_2B_2C_2) = 0,25$
.

Значит, вероятность того, что треугольник ABC накроет точку, лежащую внутри круга, всегда равна 0,25*, независимо от выбора точки.*

Рассуждение, безусловно, красивое и примечательное, но нет ли в нём ошибок? Если есть, то какие? Это первый вопрос.

Но есть и второй вопрос. Даже если математик где-то ошибся в решении, это не значит, что он ошибся в ответе. Может быть, вероятность действительно не зависит от выбора точки *M* внутри круга. Так зависит или нет?

Попробуйте разобраться в доказательстве, привлекая необходимые геометрические сведения, разобраться в вероятностной части рассуждения и подробно и убедительно ответить на эти два вопроса.

Возможная идея эссе. Рассуждения действительно интересны. И до определённого момента верны: действительно, если точка M центр круга, то случайный вписанный треугольник накрывает ее с вероятностью 0,25.

К сожалению, на этом верные рассуждения заканчиваются. В основе «доказательства» лежат два проектирования. Первое – параллельное, в направлении, перпендикулярному большему диаметру эллипса (рис.4), второе – центральное с центром в вершине конуса (рис.3). Оба эти проектирования не сохраняют длины дуг. Иными словами две дуги одной и той же длины на окружности переходят в дуги разных длин на эллипсе при первом проектировании, а потом – в разные по длине дуги окружности при втором.

Поэтому случайный треугольник, который был сначала, преобразуется в не совсем неслучайный треугольник: положения трех его вершин уже не является равномерно распределёнными на окружности. Таким образом, рассуждение ошибочно.

Чтобы понять, что вероятность накрытия зависит от выбора точки M, сложных рассуждений не требуется. Если эта вероятность постоянна и равна 0,25 для всех точек внутри круга, то она должна быть равна 0,25 и для точки M, лежащей на границе круга или сколь угодно близко к ней. Не составляет труда видеть, что если точка M на границе круга, то треугольник накроет её, только если он случайно попадет одной из своих вершин в точку M, а вероятность этого равна нулю.

Комментарий. К сожалению, нее нашлось ни одного участника, кто, взявшись за эту действительно непростую тему, сумел бы найти ошибки в доказательстве.

Оргкомитет благодарит за истинно английское чувство юмора участницу олимпиады, которая написала очень короткое эссе: «Математик совершенно прав: я решила эту задачу, и у меня получилось точно так же».