

7 – 11  
Эссе

**1. Проблема профессора Кадзуо Хаги.** Профессор Кадзуо Хага из университета Цукубы<sup>1</sup> изобретатель и энтузиаст оригамики — геометрического оригами. Однажды он поставил интересный вопрос.

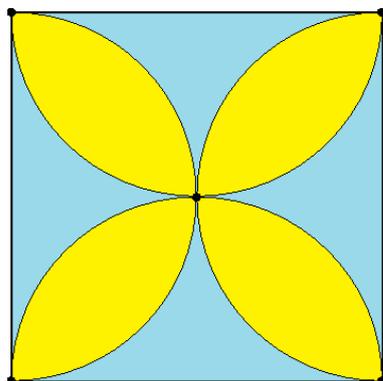


Рис. 1

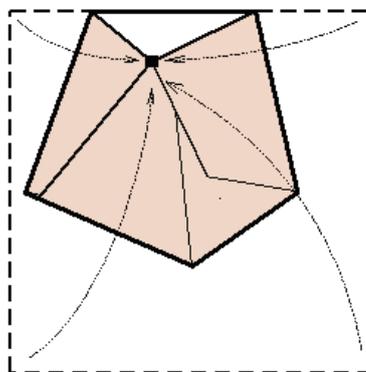


Рис. 2

На рис. 1 бумажный квадрат разделен на желтые и голубые области четырьмя полуокружностями. Получается изящный орнамент, напоминающий цветок.

Если выбрать точку в какой-нибудь голубой области и затем последовательно сделать сгибы так, что каждая вершина квадрата наложится на эту точку, то в результате получится пятиугольник (см. рис. 2) Поэтому объединение голубых фигур профессор Хага назвал областью пятиугольников или просто 5-областью.

Желтым цветом показана 6-область.

Четыре вершины и центр квадрата — точки, приводящие к четырехугольникам.

Профессор Хага неоднократно рассказывал школьникам и учителям математики о распределении точек по числу вершин получающегося многоугольника. Он пишет следующее:

*«Я заметил, что, если попросить выбрать случайную точку, то намного больше людей отмечает точку, приводящую к шестиугольнику, чем к пятиугольнику. Очень редко встречаются те, кто выбирает точки, дающие четырехугольник. Возникает вопрос: пропорционально ли число людей, о которых идет речь, площадям областей?»*

*Чтобы ответить на этот вопрос, найдем площади областей. Пусть длина стороны квадрата равна 1. Тогда радиус каждого полукруга равен 0,5, а его площадь равна  $\frac{\pi}{8}$ . Значит, общая площадь четырех полукругов равна  $\frac{\pi}{2}$ . Таким образом, площадь лепестков, то есть площадь области*

<sup>1</sup> Университетский город близ Токио

шестиугольников равна  $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$ . А площадь области пятиугольников равна  $1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \approx 0,43$ .

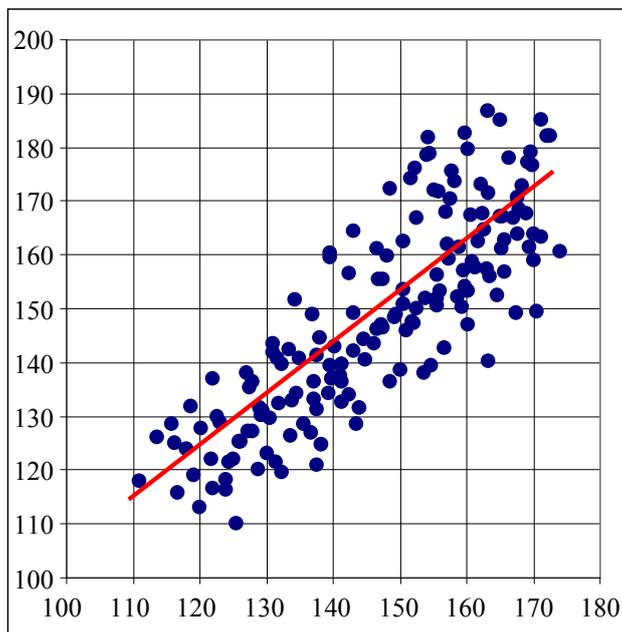
*Оказывается, разница площадей не очень велика. Отношение числа людей, выбирающих точки, лежащие в соответствующих областях несоразмерно отношению площадей. Было бы интересно узнать причину, по которой точки вне лепестков обладают меньшей привлекательностью, чем точки внутри них».*

Проведите эксперимент. Для этого Вам потребуется несколько десятков бумажных квадратов. Можно использовать белые чистые салфетки, разрезанные на квадраты без сгибов. Попросите как можно больше людей (своих друзей, а также взрослых) отметить произвольную точку на чистом бумажном квадрате. Если собрать все отмеченные точки на одном рисунке, то получится распределение точек. Может быть, свойства этого распределения помогут объяснить, почему любители шестиугольников встречаются гораздо чаще, чем мог бы ожидать профессор Хага, сравнивая площади областей?

7 – 11  
Эссе

## 2. Как связан рост мальчиков и рост девочек?

Однажды учительница математики решила показать своим ученикам, что рост мальчиков и рост девочек — независимые случайные величины. Для этого учительница провела исследование. В каждом классе она выбрала случайным образом 10 мальчиков и 10 девочек, случайно разбила их на пары мальчик-девочка и записала рост мальчика  $x_k$  и девочки  $y_k$  в каждой паре. Получились пары  $(x_k; y_k)$ . Когда учительница отметила все результаты на диаграмме рассеивания (см. рис.) она к своему ужасу обнаружила, что точки сгруппированы возле наклонной прямой (см. рис).



Значит, между ростом мальчиков и ростом девочек есть очевидная связь! Как же так?

Напишите короткое эссе (1-2 страницы), в котором попробуйте объяснить, ошиблась ли учительница в своих выводах, и если да, то в чем состоит ее вероятная ошибка.

9 – 11  
Эссе

**3. Страховая компания.** Страховая компания ABC страхует автомобили. Страховая стоимость автомобиля зависит от его возраста. Агенты компании рассчитывают уценку очень просто — машины старше двух лет каждый год теряют в цене 10%.

По данным сайта [www.auto.ru](http://www.auto.ru) или других источников проведите исследование на тему — соответствует ли оценочная политика страховой компании ABC практике, сложившейся на рынке подержанных автомобилей. Свое исследование напишите в виде небольшого эссе (2-3 страницы). При выполнении работы учтите, что среди автомобилей бывают тюнингованные (особым образом оборудованные и отделанные) и разбитые. Цены на те и другие значительно отличаются от средней цены.

6 – 9  
1 б.

**4. Медиана.** В числовом наборе 100 чисел. Если выкинуть одно число, то медиана оставшихся чисел будет равна 78. Если выкинуть другое число, то медиана оставшихся чисел будет 66. Найдите медиану всего набора.

6 – 9  
1 б.

**5. Легкие номера.** В городе, где живет Рассеянный Ученый, телефонные номера состоят из 7 цифр. Ученый легко запоминает телефонный номер, если этот номер — палиндром, то есть он одинаково читается слева направо и справа налево.

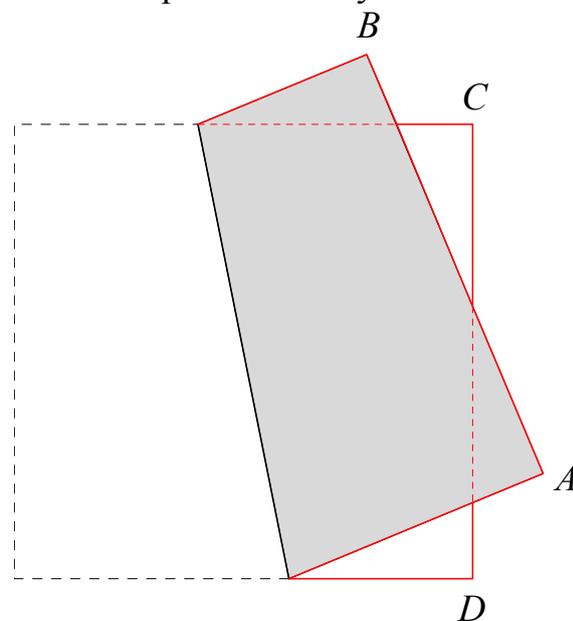
Например, номер 443 53 44 Ученый запоминает легко, потому что этот номер — палиндром. А номер 372 36 27 — не палиндром, поэтому Ученый такой номер запоминает с трудом.

Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Ученый запомнит легко.

6 – 9  
1 б.

**6. Оригами.** Митя собирается согнуть квадратный лист бумаги  $ABCD$ . Митя называет сгиб красивым, если сторона  $AB$  пересекает сторону  $CD$  и четыре получившихся прямоугольных треугольника равны.

Перед этим Ваня выбирает на листе случайную точку  $F$ . Найдите вероятность того, что Митя сможет сделать красивый сгиб, проходящий через точку  $F$ .



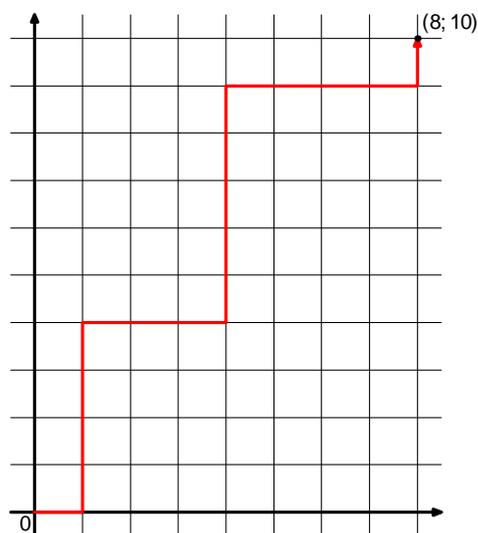
6 – 9  
1 б.

**7. Избиратели.** 40% приверженцев некоторой политической партии являются женщинами. 70% приверженцев этой партии — городские жители. При этом 60% горожан, поддерживающих партию, — мужчины. Являются ли независимыми события «приверженец партии — горожанин» и «приверженец партии — женщина»?

9 – 11  
1 б.

**8. Надежность прибора.** Рассеянный Ученый сконструировал прибор, состоящий из датчика и передатчика. Средний срок (математическое ожидание) службы датчика 3 года, средний срок службы передатчика — 5 лет. Зная распределения срока службы датчика и передатчика, Рассеянный Ученый вычислил, что средний срок службы всего прибора равен 3 года 8 месяцев. Не ошибся ли Рассеянный Ученый в своих расчетах?

**9. Муха на решетке.** Муха ползет из начала координат. При этом муха двигается только по линиям целочисленной сетки вправо или вверх (монотонное блуждание). В каждом узле сетки муха случайным образом выбирает направление дальнейшего движения: вверх или вправо. Найдите вероятность того, что в какой-то момент:



7 – 9. 1 б.

а) муха окажется в точке  $(8; 10)$ ;

7 – 9. 2 б.

б) муха окажется в точке  $(8; 10)$ , по дороге пройдя по отрезку, соединяющему точки  $(5; 6)$  и  $(6; 6)$ ;

7 – 11. 3 б.

в) муха окажется в точке  $(8; 10)$ , пройдя внутри круга радиуса 3 с центром в точке  $(4; 5)$ .

7 – 11  
2 б.

**10. Наименьшая дисперсия.** В числовом наборе  $n$  чисел, среди которых есть числа 0 и 1. Какова наименьшая возможная дисперсия такого набора чисел? Каким для этого должен быть набор?

7 – 11  
2 б.

**11. Что? Где? Когда?** Знатоки и Телезрители играют в «Что? Где? Когда?» до шести побед — кто первый выиграл шесть раундов, тот и победил в игре. Вероятность выигрыша Знатоков в одном раунде равна 0,6, ничьих не бывает. Сейчас Знатоки проигрывают со счетом 3 : 4. Найдите вероятность того, что Знатоки все же выигрывают.

**12. Муха на решетке 2.** Муха двигается из начала координат только вправо или вверх по линиям целочисленной сетки (монотонное блуждание). В каждом узле сетки муха случайным образом выбирает направление дальнейшего движения: вверх или вправо.

7 – 11. 2 б.

а) Докажите, что рано или поздно муха достигнет точки с абсциссой 2011.

9 – 11. 3 б.

б) Найдите математическое ожидание ординаты Мухи в момент, когда муха достигла абсциссы 2011.

**13. Дисперсия углов.** Точку  $O$ , лежащую внутри треугольника  $ABC$ , соединили отрезками с вершинами треугольника. Докажите, что дисперсия набора углов  $AOB$ ,  $AOC$  и  $BOC$  меньше, чем

7 – 9. 2 б.

а)  $\frac{10\pi^2}{27}$ ;

9 – 11. 4 б.

б)  $\frac{2\pi^2}{9}$ .

6 – 11  
3 б.

**14. Советники короля Артура.** У короля Артура два одинаково мудрых советника — Мерлин и Персифаль. Каждый из них находит верный ответ на любой вопрос с вероятностью  $p$  или неверный ответ с вероятностью  $q = 1 - p$ .

Если оба советника говорят одно и то же, король слушается их. Если они говорят противоположное, то король выбирает решение, подбрасывая монету.

Однажды Артур задумался — зачем ему два советника, не хватит ли одного? Тогда король позвал советников и сказал:

– Мне кажется, что вероятность принятия верных решений не уменьшится, если я оставлю одного советника и буду его слушаться. Если это так, я должен уволить одного из Вас. Если это не так, я оставлю все, как есть. Ответьте мне, должен ли я уволить одного из вас?

– Кого именно ты собираешься уволить, король Артур? — спросили советники.

– Если я приму решение уволить одного из вас, то сделаю выбор с помощью жребия, бросив монету.

Советники ушли думать над ответом. Советники, повторим, одинаково мудрые, но не одинаково честные. Персифаль очень честен и постарается дать верный ответ, даже если ему грозит увольнение. А Мерлин, честный во всем прочем, в этой ситуации решает дать такой ответ, чтобы вероятность его увольнения была как можно меньше. Какова вероятность того, что Мерлин будет уволен?

6 – 11  
3 б.

**15. Носорог.** На шкуре у Носорога складки — вертикальные и горизонтальные. Если у Носорога на левом боку  $a$  вертикальных,  $b$  горизонтальных складок, а на правом —  $c$  вертикальных и  $d$  горизонтальных, будем говорить, что это Носорог в состоянии  $((a; b); (c; d))$  или просто Носорог  $((a; b); (c; d))$ .

Если Носорог чешется каким-то боком о баобаб вверх-вниз и у Носорога на этом боку найдутся две горизонтальные складки, то эти две горизонтальные складки разглаживаются. Если двух горизонтальных складок нет, то ничего не происходит.

Аналогично, если Носорог чешется боком вперед-назад и на этом боку найдутся две вертикальные складки, то они разглаживаются, если же таких двух складок не найдется, то ничего не происходит.

Если на каком-то боку две какие-то складки разглаживаются, то на другом боку немедленно появляется одна вертикальная складка и одна горизонтальная.

Носороги чешутся часто, случайным боком, о случайные баобабы в случайных направлениях.

Вначале в саванне было стадо Носорогов  $((0; 2); (2; 1))$ . Докажите, что через некоторое время в саванне появится Носорог  $((2; 0); (2; 1))$ .

9 – 11  
3 б.

**16. Шеренга.** По свистку учителя физкультуры все ученики, 10 мальчиков и 7 девочек, выстроились в шеренгу в случайном порядке — кто куда успел. Найдите математическое ожидание величины «Число девочек, стоящих левее всех мальчиков».

10 – 11  
3 б.

**17. Живучесть Змея Горыныча.** Илья Муромец встречает трехголового Змея Горыныча и начинается битва. Каждую минуту Илья отрубает Змею одну голову. Пусть  $x$  — живучесть Змея ( $x > 0$ ). Вероятность того, что на месте отрубленной головы вырастет  $k$  новых голов ( $k = 0, 1, 2$ ), равна

$$p_k = \frac{x^k}{1 + x + x^2}.$$

В течение первых 10 минут сражения Илья записывал, сколько голов выросло на месте каждой срубленной. Получилась следующая последовательность:

$$K = (1, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 2)$$

Найдите такое значение живучести Змея, при котором вероятность последовательности  $K$  наибольшая<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Описанный метод поиска оценки параметра модели, исходящий из максимума вероятностей осуществившихся событий, является разновидностью метода **наибольшего правдоподобия**.

8 – 11  
4 б.

**18. Популяция<sup>3</sup>.** Рассеянный Ученый в своей лаборатории вывел одноклеточный организм, который с вероятностью 0,6 делится на два таких же организма, а с вероятностью 0,4 погибает, не оставив потомства. Найдите вероятность того, что через некоторое время у Рассеянного Ученого не останется ни одного такого организма.

8 – 11  
4 б.

**19. Конец Змея Горыныча.** Илья Муромец встречает трехголового Змея Горыныча и начинается битва. Каждую минуту Илья отрубает Змею одну голову. С вероятностью  $\frac{1}{4}$  на месте срубленной головы вырастает две новых, с вероятностью  $\frac{1}{3}$  — только одна новая голова и с вероятностью  $\frac{5}{12}$  — ни одной головы. Змей считается побежденным, если у него не осталось ни одной головы. Найдите вероятность того, что рано или поздно Илья победит Змея.

---

<sup>3</sup> Популяцией называют всю совокупность организмов одного вида