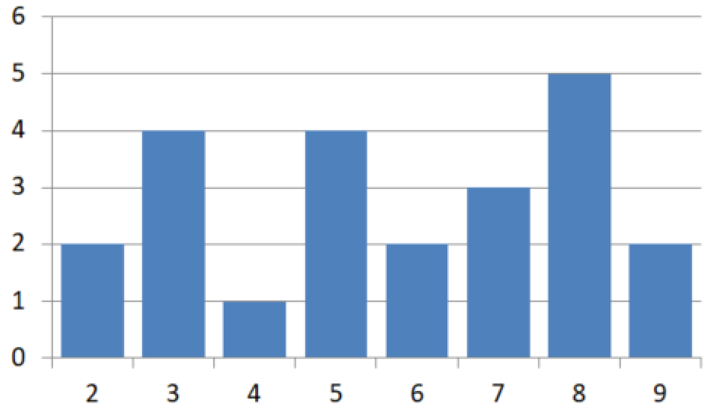
Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
27 января 2024 г.

7 класс. Ответы и решения

Задача 1. (1 балл) В кафе 23 пластиковых лотка с пирожными. На диаграмме показано, как распределены пирожные. На горизонтальной прямой показано количество пирожных, а на вертикальной – сколько лотков содержит именно такое число пирожных. Найдите медиану величины «*число пирожных в лотке*».



Ответ: 6.

Решение. Всего в массиве данных 23 числа. Упорядочим их по возрастанию: два числа 2, четыре числа 3 и так далее. На 12-м месте стоит число 6. Оно и является медианой.

Задача 2. (1 балл). Импорт свежего репейника составляет важную статью бюджетных расходов Анчурии. Премьер-министр на протяжении восьми дней записывал на бумажках биржевую цену репейника (в анчурийских долларах за ящик) и приклеивал эти бумажки к каминной полке в своём кабинете. На девятый день он обнаружил, что уборщица аккуратно отклеила все бумажки и сложила их на стол стопкой в случайном порядке.

$\boxed{133}$ $\boxed{149}$ $\boxed{137}$ $\boxed{113}$ $\boxed{126}$ $\boxed{160}$ $\boxed{146}$ $\boxed{124}$

Сможет ли премьер-министр однозначно восстановить порядок записок, если он помнит только, что:

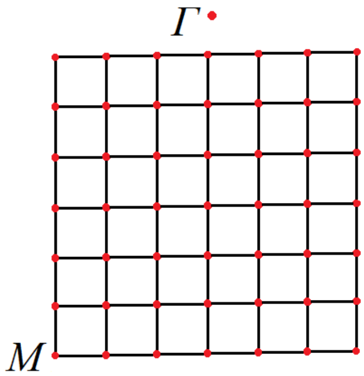
- пять раз цена была выше, чем накануне, и два раза ниже, чем накануне;
- цена никогда не поднималась больше чем на 10% по сравнению с предыдущим днём.

Ответ: нет.

Решение. Перечисленным условиям удовлетворяет не одна последовательность. Например,

137, 149, 113, 124, 133, 146, 160, 126 и 126, 113, 124, 133, 146, 137, 149, 160.

Задача 3. (1 балл). На столе с помощью 84 спичек выложили 36 маленьких квадратиков, как показано на рисунке. В вершине квадрата, обозначенной буквой *М*, сидит муравей, а в точке *Г* сидит гусеница. Муравей может ползать только по спичкам, а гусеница не может переползать через спички. Сколько спичек нужно убрать, чтобы гусеница могла проползти в центр любого квадратика, а муравей по-прежнему мог доползти до любой вершины любого квадратика?



Ответ: 36.

Решение. Рассмотрим спички как ребра графа. В этом графе 49 вершин. Чтобы оба условия выполнялись, после удаления ребер должно остаться дерево, содержащее все 49 вершин. В этом дереве будет 48 ребер. Следовательно, нужно убрать $84-48=36$ спичек.

Задача 4 (2 балла). У папы есть коробка, в которой лежат одинаковые по размеру шары разных цветов: красные, жёлтые и синие. Вова собирается вынуть из коробки случайный шар. Он спрашивает папу: «Какого цвета шар мне вероятнее всего попадётся?» Папа отвечает: «Синего». Вова переспрашивает: «Значит, вероятнее всего, что мне попадётся синий шар?» «Нет, вероятнее всего, что синий шар тебе не попадётся», – отвечает папа. Какое наименьшее количество шаров может быть в коробке, если папа всегда говорит правду?

Авт. Геннадий Гусев,6 класс

Ответ: 7.

Решение. Если шаров какого-то цвета нет (во время олимпиады были вопросы, может ли так быть), то указанная в условии ситуация невозможна. В коробке есть хотя бы по одному шару каждого цвета. Значит, синих шаров, по крайней мере, два.

Если синих шаров два, то желтых и красных должно быть по одному. Но в этом случае нарушается второе условие: вероятность вынуть синий шар оказывается не меньше, а равна вероятности вынуть не синий шар.

Если синих шаров три, то красных и желтых вместе должно быть хотя бы 4. Следовательно, наименьшее количество шаров не меньше чем 7.

Пример: три синих шара, два желтых и два красных удовлетворяют условию.

Задача 5. (2 балла) Числовой набор обладает следующим свойством: если к нему добавить некоторое число, то среднее арифметическое набора увеличится на 3, а если это же число добавить ещё раз, то среднее арифметическое увеличится ещё на 2. Сколько чисел может быть в таком наборе?

Ответ: 4.

Решение. Пусть в наборе n чисел, их среднее равно $\overline{x}$, а добавляется число a. Тогда

$$\overline{x}+3=\frac{\overline{x}n+a}{n+1} \text{ и } \overline{x}+5=\frac{\overline{x}n+2a}{n+2}.$$

Из этих уравнений получаем:

$$\overline{x}+3n+3=a \text{ и } 2\overline{x}+5n+10=2a.$$

Умножим первое уравнение почленно на 2 и вычтем из второго: $-n+4=0$, откуда $n=4$.

Задача 6 (3 балла). Валя слепила себе из пластилина несимметричный игральный кубик. Коля вырезал себе из дерева ещё более несимметричный кубик. Грани на кубиках пронумерованы. Валя и Коля бросали свои кубики и записывали частоты выпавших граней. Обнаружилось, что:

- Валя бросила кубик 100 раз, и у неё единица выпала 14 раз;
- Коля бросил кубик 20 раз, и единица выпала у него 7 раз;
- при всех n от 2 до 6 отношение частоты выпадения грани n к частоте выпадения грани $n-1$ у Вали в точности в $\frac{n}{n-1}$ раз больше, чем это же отношение у Коли.

Найдите среднее арифметическое числа очков, выпавших у Коли.

Ответ: 2,5.

Решение. Пусть частоты выпадения граней у Вали равны $v_1, ..., v_6$, а у Коли частоты граней равны $k_1, ..., k_6$.

Тогда

$$\frac{v_2}{v_1} = 2\frac{k_2}{k_1}, \text{ откуда } v_2 k_1 = 2v_1 k_2,$$

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{v_3}{v_2}\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}\frac{k_3}{k_2}\cdot 2\frac{k_2}{k_1} = 3\frac{k_3}{k_1}, \text{ откуда } v_3 k_1 = 3v_1 k_3.$$

Таким образом получим все равенства $v_n k_1 = n v_1 k_n$ при $n = 2, ..., 6$ и сложим их почленно:

$$v_1\left(2k_2 + 3k_3 + ... + 6k_6\right) = k_1\left(v_2 + v_3 + ... + v_6\right).$$

Добавим к обеим частям $v_1 k_1$:

$$v_1\left(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... + 6k_6\right) = k_1\left(v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_6\right).$$

Среднее число очков, выпавших на кубике у Коли, равно

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... + 6k_6 = \frac{k_1}{v_1}\left(v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_6\right) = \frac{k_1}{v_1} = \frac{7}{20} : \frac{14}{100} = 2,5.$$

Примечание. Указанная в условии ситуация возможна. Пример в таблице.

Число очков	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Валя	14	16	24	24	10	12
Коля	7	4	4	3	1	1

Авторы задач: *Геннадий Гусев (6-й класс), А.В.Шкляев, И.Р.Высоцкий.*