И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Задача 5

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

Задача Билли Бонса

Разные формулировки одной задачи и причем здесь Билли Бонс

Задача, которую мы обсудим, не имеет никакого отношения ни к Льюису Стивенсону, ни к Билли Бонсу, ни к пиратам вообще. Хотя могла бы, найдись среди пиратов, склонных к игре в кости, человек с достаточным математическим любопытством.

Дадим несколько формулировок. Начнем с обращения задачи коллекционера (см.: Математика, № 9, 2022).

1. В киндер-сюрпризах содержится серия из n игрушек. Никита хочет собрать полную коллекцию. Он купил уже k киндер-сюрпризов. Какова вероятность того, что коллекция собрана полностью?

2. В тире k стрелков стреляют по n мишеням. Каждый случайным образом выбирает себе одну из мишеней и попадает в нее. Какова вероятность того, что все мишени окажутся поражены?

3. Дана случайная последовательность натуральных чисел от 1 до n. Какова вероятность того, что среди первых k членов этой последовательности каждое число встречается хотя бы раз?

4. Билли Бонс бросил на бочку k игральных костей. Какова вероятность, что каждая из шести граней выпала хотя бы по разу?

Вопрос последней задачи настолько естественно должен возникнуть у любого пирата, играющего в кости во время штиля, что наверняка приходил в голову и самому Билли Бонсу (рис. 1).

Рис. 1. Билли Бонс. Худ. Ньюэлл Уайет

Ясно, что это не четыре разные задачи, а одна и та же задача, лишь в последней формулировке дано, что $n = 6$. Совершенно неважно, какую интерпретацию держать в голове. Мы будем решать задачу Билли Бонса для шестигранной игральной кости.

Вспомогательные сведения: формула сложения вероятностей или формула включения-исключения

Нам потребуется формула вероятности объединения нескольких событий. Для двух событий формула

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

хорошо известна из учебника 8-го класса и иллюстрируется с помощью диаграммы Эйлера. Если сложить вероятности двух событий, то вероятность их общей части войдет в сумму дважды. Поэтому

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

один раз ее нужно вычесть. Чтобы понять формулу, удобно думать не о вероятностях, а о площадях (рис. 2).

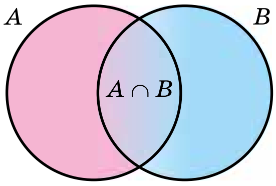

Рис. 2

Для трех событий формула строится аналогично: из суммы вероятностей вычитаются вероятности попарных пересечений, а потом возвращается одна вероятность пересечения всех трех:

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) =$$
$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) -$$
$$- \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C).$$

На рисунке 3 показана диаграмма Эйлера для трех событий. Когда из суммы вероятностей трех событий вычитаются вероятности попарных пересечений, вероятность центрального треугольника выбрасывается трижды. Поэтому ее нужно вернуть.

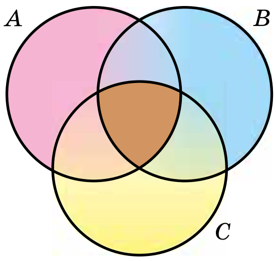

Рис. 3

Не составит труда по аналогии написать формулу сложения для n событий:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots$$
$$\ldots + \mathrm{P}(A_n) - (\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots$$
$$\ldots + \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + \mathrm{P}(A_{n-1} \cap A_n)) +$$
$$+ (\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots$$
$$\ldots + \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots$$
$$\ldots + \mathrm{P}(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n). \qquad (1)$$

Вывод формулы отнесем в конец статьи, чтобы он не мешал основным рассуждениям.

Суть равенства проста: чтобы найти вероятность объединения событий A_1, A_2, ..., A_n, нужно из суммы их вероятностей вычесть вероятности всех попарных пересечений ($j < k$), затем добавить вероятности всех пересечений по три и так далее вплоть до последнего слагаемого, которое равно вероятности пересечения всех n событий и которое входит со знаком плюс, если n нечетно, или со знаком минус, если четно.

Видно, что первая сумма состоит из $C_n^1 = n$ слагаемых, вторая — из $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ слагаемых и так далее.

Решение задачи Билли Бонса

Решение. Пусть шестигранный игральный кубик брошен k раз. Обозначим A_i событие «грань с номером i не выпала ни разу». Тогда событие A «хотя бы одна грань не выпала ни разу» можно представить как объединение шести таких событий:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6.$$

Воспользуемся формулой включения-исключения[1]:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1,\ldots,6} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 6} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < m \le 6} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_m) - \ldots - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6).$$

Событие A_i имеет вероятность

$$\mathrm{P}(A_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^k,$$

поэтому

$$\mathrm{P}(A_i) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

и, стало быть,

$$\sum_{k=1,\ldots,6} \mathrm{P}(A_i) = C_6^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Событие $A_i \cap A_j$ состоит в том, что ни одна из граней i и j не выпала ни разу. Вероятность этого

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \left(\frac{4}{6}\right)^k,$$

потому

$$\sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) = C_6^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^k.$$

Рассуждая так же относительно прочих слагаемых, получим:

$$\mathrm{P}(A) = C_6^1 \left(\frac{5}{6}\right)^k - C_6^2 \left(\frac{4}{6}\right)^k + \ldots - C_6^6 \left(\frac{0}{6}\right)^k.$$

Перейдем к противоположному событию $B = \bar{A}$ «все грани выпали хотя бы по разу»:

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - C_6^1 \left(\frac{5}{6}\right)^k + C_6^2 \left(\frac{4}{6}\right)^k - \ldots + C_6^6 \left(\frac{0}{6}\right)^k.$$

Единицу запишем как $C_6^0 \left(\frac{6}{6}\right)^k$, поменяем порядок слагаемых и вынесем $\dfrac{1}{6^k}$ за скобки:

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6^k}\left(C_6^0 \cdot 0^k - C_6^1 \cdot 1^k + C_6^2 \cdot 2^k - \ldots + C_6^6 \cdot 6^k\right).$$

Можно отойти от $n = 6$ и записать равенство в общем виде: вероятность получить хотя бы по разу каждый из n равновозможных исходов при k попытках равна

$$\mathrm{P}(B) = (-1)^n \frac{1}{n^k}\left(C_n^0 \cdot 0^k - C_n^1 \cdot 1^k + \ldots \pm C_n^n \cdot n^k\right) =$$
$$= \frac{1}{n^k} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i i^k. \qquad (2)$$

---

[1] Мы здесь не используем индекс k, поскольку эта буква занята — ею обозначено число сделанных испытаний.

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K
1										
2		k=	6							
3										
4		i=	0	1	2	3	4	5	6	7
5		Множители:	0	-1	64	-729	4096	-15625	46656	-117649
6	n=	Вероятность	1							
7	1	1,000000	1	1						
8	2	0,968750	1	2	1					
9	3	0,740741	1	3	3	1				
10	4	0,380859	1	4	6	4	1			
11	5	0,115200	1	5	10	10	5	1		
12	6	**0,015432**	1	6	15	20	15	6	1	
13	7	0,000000	1	7	21	35	35	21	7	1

Рис. 4

Расчет выполним в MS Excel. Прежде чем это сделать, попробуем предсказать некоторые результаты. Ясно, что если $k < n$, то есть попыток меньше, чем различных исходов, то вероятность получить все возможные исходы равна нулю. Значит, при $n = 6$ и $k = 1, 2, 3, 4$ и 5 выражение должно равняться нулю.

При $k = 6$, чтобы получить все возможные исходы, нужно при каждой попытке ни разу не получить то, что уже случилось прежде. Вероятность этого при $n = 6$ равна

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6!}{6^6}=0{,}0154\ldots$$

В общем случае получаем вероятность $\frac{n!}{n^n}$.

Что происходит при $k \ge n$, уже не так очевидно. Запустим компьютер и составим электронную таблицу[2] (рис. 4).

Расчет проведен в точности по формуле (2). Я предвижу удивленные и снисходительные взгляды читателей, хорошо знакомых с MS Excel. Действительно, разве можно так чудовищно расходовать ресурсы электронной таблицы? Это пример не самого удачного расчета. Можно было бы его немного усовершенствовать и упростить, но мы предпочтем упростить не немного, а кардинально. Это необязательно, но если читателю интересно, каково внутреннее устройство знакочередующихся сумм (2), он может пробежать глазами следующую часть.

Применение конечных разностей для решения задачи

Школьники трудно усваивают тему «Производная». Думаю, что и Ньютон, и Лейбниц, и даже Эйлер тоже испытали бы трудности, если бы им вдруг ни с того ни с сего сказали, что производная — это предел отношения приращения функции к чему-то там при каком-то условии. Вероятно, производная появилась вовсе не таким образом, а как естественное обобщение разностей соседних членов последовательностей, то есть значений функций в равноотстоящих точках. Простейший пример: арифметическая прогрессия

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ \ldots$$

имеет постоянную последовательность разностей:

$$d_1 = a_2 - a_1 = 1,\ d_2 = a_3 - a_2 = 1,\ d_3 = a_4 - a_3 = 1,\ \ldots$$

Поскольку все конечные разности арифметической прогрессии одинаковы, мы называем их просто «разностью прогрессии», не уточняя, какая по счету разность имеется в виду.

У геометрической прогрессии разности не постоянны. Возьмем для примера прогрессию

$$b_n = 2^n = \{2; 4; 8; \ldots\}.$$

Последовательность разностей тоже оказывается геометрической прогрессией:

$$d_1 = b_2 - b_1 = 4 - 2 = 2,\ d_2 = b_3 - b_2 = 8 - 4 = 4,$$
$$\ldots$$
$$d_n = b_{n+1} - b_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n.$$

С удивлением видим, что такое дискретное дифференцирование не повредило последовательности:

$$d_n = b_n = 2^n.$$

Не напоминает ли это $(e^x)' = e^x$? Весьма напоминает, и не случайно.

Можно было бы продолжать рассказ про разности последовательностей, получив аналог формулы Ньютона–Лейбница, и составить таблицу разностей всяких интересных последовательностей, поразительно напоминающую таблицу производных, найти кучу полезных тождеств. Но у нас другая задача — разобраться с конкретным выражением (2).

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, которая определена на всей числовой прямой или хотя бы на каком-нибудь правостороннем луче. А теперь построим функцию

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x).$$

Эта функция называется *конечной разностью* функции $f(x)$ в точке x с шагом 1. Слово «конечная» нужно, чтобы подчеркнуть, что прираще-

[2] Таблица опубликована в приложенном файле на странице https://ptlab.mccme.ru/Street_problems.

ние аргумента является не бесконечно малой величиной, а вполне конкретным числом, в нашем случае единицей.

Полученная конечная разность является функцией от x.

Например, если $f(x) = x^2$, то

$$\Delta f(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

— линейная функция. От этой функции тоже можно перейти к ее конечной разности, которая будет уже разностью второго порядка функции $f(x)$:

$$\Delta(\Delta(f(x))) = \Delta^2 f(x) = 2(x + 1) + 1 - (2x + 1) = 2.$$

Конечная разность третьего порядка и всех последующих будет уже равна 0:

$$\Delta^3 f(x) = 2 - 2 = 0,\ \ \Delta^4 f(x) = 0 - 0 = 0,\ \ \ldots$$

Еще пример: проверьте, что для функции $f(x) = x^3$ получаются три ненулевые конечные разности, а все последующие — нулевые:

$$\Delta^0 f = f = x^3,\ \ \Delta f = 3x^2 + 3x + 1,\ \ \Delta^2 f = 6x + 6,$$
$$\Delta^3 f = 6,\ \ \Delta^4 f = 0,\ \ \Delta^5 f = 0,\ \ \ldots$$

При таком конечном дифференцировании совершенно очевидно, как получается понижение степени многочлена на единицу (старшая степень исчезает) и откуда берется выражение nx^{n-1}:

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \ldots$$

Конечные разности высоких порядков легко записываются с помощью биномиальных коэффициентов. Например, для разности второго порядка получаем:

$$\Delta^2 f = \Delta f(x + 1) - \Delta f(x) =$$
$$= (f(x + 2) - f(x + 1)) - (f(x + 1) - f(x)) =$$
$$= f(x + 2) - 2f(x + 1) + f(x).$$

Конечная разность третьего порядка получается как разность разностей второго:

$$\Delta^3 f = \Delta^2 f(x + 1) - \Delta^2 f(x) =$$
$$= (f(x + 3) - 2f(x + 2) +$$
$$+ f(x + 1)) - (f(x + 2) - 2f(x + 1) + f(x)) =$$
$$= f(x + 3) - 3f(x + 2) + 3f(x + 1) - f(x).$$

И так далее. Для разности n-го порядка придется записать (легко доказывается по индукции):

$$\Delta^n f(x) = f(x+n) - C_n^1 f(x+n-1) + C_n^2 f(x+n-2) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} f(x+1) + (-1)^n f(x) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f(x+n-j) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i f(x+i). \qquad (3)$$

Мы записали результат двумя способами. Второй получен из первого заменой $n - i = j$ (*проверьте*).

А это уже очень напоминает выражение (2), которое получилось при решении задачи Билли Бонса. Действительно, если положить $f(x) = x^k$, то (3) превращается в

$$\Delta^n x^k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \cdot (x+i)^k.$$

Чтобы окончательно превратить это выражение в (2), нужно разделить функцию $f(x) = x^k$ на n^k и положить $x = 0$. Получается, что вероятность получить все n равновозможных различных исходов в результате k испытаний равна

$$\mathrm{P}(B) = \Delta^n \left(\frac{x}{n}\right)^k \text{ в точке } x = 0.$$

Символически это записывается так:

$$\mathrm{P}(B) = \Delta^n \left(\frac{0}{n}\right)^k.$$

Решение задачи Билли Бонса свелось к вычислению k-й дискретной производной одночлена $f(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^k$ в нуле. Значит, вместо громоздких вычислений по формуле (2) достаточно последовательно искать конечные разности этой функции, и разность n-го порядка даст нужный результат. Сделать это в электронной таблице несложно (рис. 5).

В строке 6 подсчитаны значения $\left(\frac{x}{n}\right)^k$ при $x = 0$, 1, 2, ... В строке 7 и далее вычислены конеч-

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1														
2														
3		n=	6			Результат:=		0,015432099						
4		k=	6											
5		x=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6		(x/n)^k=	0,00000	0,00	0,00	0,02	0,09	0,33	1,00	2,52	5,62	11,39	21,43	37,97
7	Delta	1	0,00002	0,00	0,01	0,07	0,25	0,67	1,52	3,10	5,77	10,04	16,54	26,03
8	Delta	2	0,00133	0,01	0,06	0,17	0,42	0,86	1,58	2,67	4,27	6,49	9,49	13,43
9	Delta	3	0,01157	0,05	0,12	0,24	0,44	0,72	1,10	1,60	2,22	3,00	3,93	5,05
10	Delta	4	0,03344	0,07	0,13	0,20	0,28	0,38	0,50	0,63	0,77	0,94	1,11	1,31
11	Delta	5	0,03858	0,05	0,07	0,08	0,10	0,12	0,13	0,15	0,16	0,18	0,19	0,21
12	Delta	6	0,01543	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
13	Delta	7	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
14	Delta	8	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15	Delta	9	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	Delta	10	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	Delta	11	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
18	Delta	12	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
19	Delta	13	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			
20	Delta	14	0,00000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00				

Рис. 5

ные разности. Значения разностей при $x = 0$ находятся в столбце D. Результат в ячейке I3 считывается из этого столбца при $n = 6$ (в данном случае из ячейки D12).

Просто, интересно и без лишней строгости конечное дифференцирование и интегрирование описаны в замечательной книге «Конкретная математика» (*Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Основание информатики / пер. с англ.; под ред. А.Б. Ходулева. — М.: Мир, 1998). Там же вы найдете немало интересного о гармонических числах и о других объектах, которые мы так или иначе будем использовать в нашем цикле.

Вывод формулы включения-исключения

Торжественно пообещав редактору не углубляться в технические сложности и писать по возможности проще, выношу вывод формулы (1) в приложение, считая, что он и так всем известен из теории множеств. Однако вывод этой формулы из чисто вероятностных соображений заслуживает внимания.

Возьмем какой-нибудь случайный опыт и в нем произвольное событие A. Если оно наступило, будем считать, что оно случилось 1 раз, а если оно не наступило, то скажем, что оно случилось 0 раз. Получается случайная величина:

$$I_A = \begin{cases} 0, \text{ если событие } A \text{ не наступило,} \\ 1, \text{ если событие } A \text{ наступило.} \end{cases}$$

Эта случайная величина принимает всего два значения, 0 и 1, и потому называется *бинарной*. Ее роль — указывать на то, случилось событие A или нет. Поэтому мы будем называть ее *индикатором* события A. Операции над событиями легко переносятся на алгебраические операции над индикаторами.

Пусть даны события A и B. Легко проверить (*сделайте это или поручите школьникам*), что справедливы равенства:

1) $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$;
2) $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$.

Эти два равенства очевидны, и ясно также, что равенство 2 верно не только для двух, но и для произвольного количества событий.

Возьмем теперь в нашем опыте события A_1, ..., A_n и рассмотрим событие $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$. Индикатор этого события выглядит следующим образом:

$$I_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n} = I_{\bar{A}_1} \cdot I_{\bar{A}_2} \cdot \ldots \cdot I_{\bar{A}_n} =$$
$$= \left(1 - I_{A_1}\right) \cdot \left(1 - I_{A_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - I_{A_n}\right).$$

С другой стороны, событие $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$ совпадает с событием $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}$, поскольку оба они состоят в том, что ни одно из событий A_1, ..., A_n не наступит. Поэтому

$$\left(1 - I_{A_1}\right) \cdot \left(1 - I_{A_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - I_{A_n}\right) = I_{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}} =$$
$$= 1 - I_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}.$$

Раскроем скобки:

$$1 - \left(I_{A_1} + \ldots + I_{A_n}\right) +$$
$$+ \Big(\underbrace{I_{A_1} \cdot I_{A_2} + \ldots + I_{A_i} \cdot I_{A_j} + I_{A_{n-1}} \cdot I_{A_n}}_{\text{Сумма всех возможных попарных произведений}}\Big) -$$
$$- \Big(\underbrace{I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot I_{A_3} + \ldots + I_{A_i} \cdot I_{A_j} \cdot I_{A_k} + \ldots + I_{A_{n-2}} \cdot I_{A_{n-1}} \cdot I_{A_n}}_{\text{Сумма всех возможных произведений по три}}\Big) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \underbrace{I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot \ldots \cdot I_{A_n}}_{\text{Произведение всех}} = 1 - I_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}.$$

Единицы взаимно уничтожаются, и, поменяв знаки у всех слагаемых на противоположные, получаем:

$$I_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \left(I_{A_1} + \ldots + I_{A_n}\right) -$$
$$- \Big(\underbrace{I_{A_1} \cdot I_{A_2} + \ldots + I_{A_i} \cdot I_{A_j} + \ldots + I_{A_{n-1}} \cdot I_{A_n}}_{\text{Сумма всех возможных попарных произведений}}\Big) +$$
$$+ \Big(\underbrace{I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot I_{A_3} + \ldots + I_{A_i} \cdot I_{A_j} \cdot I_{A_k} + \ldots + I_{A_{n-2}} \cdot I_{A_{n-1}} \cdot I_{A_n}}_{\text{Сумма всех возможных произведений по три}}\Big) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \underbrace{I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot \ldots \cdot I_{A_n}}_{\text{Произведение всех}}.$$

Снова перейдем от произведений индикаторов к индикаторам пересечений:

$$I_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \left(I_{A_1} + \ldots + I_{A_n}\right) -$$
$$- \Big(\underbrace{I_{A_1 \cap A_2} + \ldots + I_{A_i \cap A_j} + \ldots + I_{A_{n-1} \cap A_n}}_{\text{Сумма индикаторов всех попарных пересечений}}\Big) +$$
$$+ \Big(\underbrace{I_{A_1 \cap A_2 \cap A_3} + \ldots + I_{A_i \cap A_j \cap A_k} + \ldots + I_{A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n}}_{\text{Сумма индикаторов всех возможных пересечений по три}}\Big) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \underbrace{I_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}}_{\text{Индикатор пересечения всех}}. \qquad (4)$$

Равенство (4) очень похоже на нужную формулу, но все же оно про случайные величины, а не про вероятности. Остался один шаг.

Снова рассмотрим индикатор I_A произвольного события A. Предположим, что это событие имеет вероятность $\mathrm{P}(A)$. Тогда можно записать распределение индикатора: значения и их вероятности в таблице

$$I_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \mathrm{P}(A) & \mathrm{P}(A) \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание индикатора равно

$$\mathrm{E}I_A = \mathrm{P}(A).$$

Вероятность события открывается нам новой гранью — это *среднее значение некоторой* *бинарной случайной величины, а именно индикатора этого события*. В равенстве перейдем к математическим ожиданиям, просто поставив букву E перед каждым слагаемым:

$$\mathrm{E}I_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}=\left(\mathrm{E}I_{A_1}+\ldots+\mathrm{E}I_{A_n}\right)-$$

$$-\left(\underbrace{\mathrm{E}I_{A_1\cap A_2}+\ldots+\mathrm{E}I_{A_i\cap A_j}+\ldots+\mathrm{E}I_{A_{n-1}\cap A_n}}_{\text{Сумма ожиданий индикаторов всех попарных пересечений}}\right)+$$

$$+\left(\underbrace{\mathrm{E}I_{A_1\cap A_2\cap A_3}+\ldots+\mathrm{E}I_{A_i\cap A_j\cap A_k}+\mathrm{E}I_{A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n}}_{\text{Сумма ожиданий индикаторов всех возможных пересечений по три}}\right)-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\underbrace{\mathrm{E}I_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n}}_{\text{Ожидание индикатора пересечения всех}}.$$

Теперь вместо EI везде запишем вероятность P, и получится в точности равенство (4).

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите задачу Билли Бонса для восьмигранной кости: какова вероятность выбросить восемь разных граней, бросив правильный октаэдр ровно восемь раз?

2. Рассеянный Ученый купил 10 одинаковых чашек, чтобы пить чай, и поставил их в кухонный шкафчик. Как только наступает время пить чай, Ученый берет из шкафчика случайную чашку, а после чаепития ставит ее снова в шкафчик. На данный момент состоялось 15 чаепитий. Какова вероятность того, что Ученый пил чай уже из всех чашек хотя бы по разу?

3. Найдите функцию $f(x)$, у которой конечная разность (с шагом 1) равна $\Delta f(x) = x^2$.

4. Докажите конечно-разностный аналог формулы Ньютона–Лейбница

$$\sum_{i=k}^{n} f(i)=F(n+1)-F(k),$$

где $f(x) = \Delta F(x)$ — конечная разность функции $F(x)$.

5. Пользуясь задачами 3 и 4, докажите формулу Архимеда для суммы квадратов натуральных чисел:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ответы к задачам из статьи «Задача коллекционера»

1. 71,954..., 23,801.... Приближенные значения 72,015 и 24,207 соответственно. **2.** 10,819... (10,644..., если пользоваться приближенной формулой (7)). **3.** а) $\frac{8!}{8^8}=0{,}002403$; б) вероятности равны. **5.** $H_8 = 2{,}717\ldots$

Из интернета

Российские школьники участвуют в олимпиадах в 1,5 раза чаще, чем 20 лет назад

Евгения Добрынина, rg.ru

Нынешнее поколение школьников — самое активное. Доля тех, кто пробовал свои силы в интеллектуальных состязаниях, сегодня составляет 71%. Из тех, кому сейчас 31–35 лет, только 58% называют себя причастными к олимпиадному движению. Среди россиян 25–30 лет таких уже 63%, среди опрошенных от 18 до 24 лет — 68%. Таким образом, практически за 20 лет доля участников школьных олимпиад выросла почти в 1,5 раза. Таковы результаты совместного исследования Аналитического центра НАФИ и международной ИТ-олимпиады «Траектория будущего».

Среди участников школьных олимпиад больше девочек. Жители городов и сел участвуют в олимпиадах примерно с одинаковым энтузиазмом, но количество тех, кто никогда не участвовал в олимпиадах, среди сельской молодежи выше.

Всего же в интеллектуальных соревнованиях никогда не принимали участие 24% опрошенных. Причины разные. Чаще всего ребята либо не были уверены в своих знаниях, либо точно знали, что не потянут олимпиадный уровень. Пятая часть признались, что просто не было времени и сил на подготовку.

Участниками олимпиад обычно движет желание расширить кругозор по интересующему предмету, лидерские амбиции и возможность получить дополнительные баллы для поступления в вуз. Есть и те, кому просто нравится соревновательный дух. Влияют на решение участвовать в олимпиаде рекомендация педагога, желание найти единомышленников, престиж, а также денежные награды. По мнению опрошенных молодых людей, привлекательность олимпиад в глазах потенциальных участников серьезно бы повысилась в случае гарантий призерам поступить в вуз без экзаменов, хороших денежных призов, а еще лучше — возможности самому выбрать вариант награды.

Результаты исследования показывают эффективность системной работы по популяризации олимпиад. За 20 лет произошел серьезный сдвиг в мотивации и восприятии школьниками интеллектуальных испытаний. Важно освещать истории успеха ребят, активно рассказывать о том, как олимпиада повлияла на участников, какие у них произошли изменения в жизни. Это позволяет привлекать внимание школьников и подтверждает, что при желании все возможно.