И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

Задача о строгой учительнице

Откуда приходит везение?

Начнем не про задачу и даже не про учительницу. Позвольте сначала рассказать об одной практической работе, которую я иногда провожу для школьников или для учителей на учительских семинарах. Работа называется «Откуда приходит везение?». Смысл простой: смоделировать геометрическое распределение и посмотреть на его свойства с чисто практической точки зрения.

Присутствующим выдается по одному игральному кубику (иногда три монеты, но с кубиком проще). Кубик нужно бросать до тех пор, пока не выпадет, например, шестерка. Вероятность этого $p = \frac{1}{6}$ при каждом отдельном броске.

Обычно я заворачиваю все действие в сюжет о летчиках Первой мировой войны. Предположим, что в некоторой эскадрилье из боевого вылета не возвращается в среднем каждый шестой самолет. То есть вероятность быть сбитым во время вылета равна $\frac{1}{6}$. Наша задача — посмотреть, как распределяется число вылетов. Выясняется, что среднее число вылетов, которое совершает самолет до того, как его сбили, равно 6. Это почти очевидно. Еще выясняется, что в большинстве случаев летчик не дотягивает до этого среднего, его самолет бывает сбит (выпадает шестерка) раньше. Летчиков, кто сумел слетать всего один-два раза, мы с полным правом считаем невезучими, и их довольно много.

Пусть случайная величина X равна числу вылетов, сделанных летчиком (числу бросаний кубика до выпадения шестерки). Вероятность того, что «самолет будет сбит» именно в k-м полете, равна

$$g_k = \mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Здесь первый множитель $(1 - p)^{k-1}$ — это вероятность того, что шестерка не выпала при первых $(k - 1)$ бросании, а второй множитель p — вероятность того, что при k-м броске шестерка все же, наконец, выпала. Последовательность g_k — геометрическая прогрессия. По этой причине распределение, которому подчиняется случайная величина X, называется *геометрическим*. Геометрическое распределение обычно обозначают $G(p)$, указывая в скобках параметр, от которого распределение зависит. Геометрическое распределение *бесконечно*, поскольку теоретически число бросков k может быть каким угодно большим.

Знаменатель прогрессии меньше единицы:

$$q = 1 - p = \frac{5}{6} < 1,$$

а потому прогрессия убывает, значит, вероятность выбросить шестерку при первом броске больше, чем при втором, при втором — больше, чем при третьем, и т.д.

Как мы знаем (см., например, статью «Задача коллекционера») и как отметили выше, среднее число бросаний-вылетов равно

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{p} = 6.$$

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Дисперсия числа бросков X равна

$$\mathrm{D}X = \frac{q}{p^2} = 30,$$

а потому стандартное отклонение равно

$$\sqrt{\mathrm{D}X} = \sqrt{30} \approx 5{,}48.$$

Чтобы достаточно убедительно моделировать геометрическое распределение, нужно довольно много данных. Поэтому обычно я прошу каждого побыть летчиком по два-три раза, чтобы собрать хотя бы 40–50 значений. Один из присутствующих садится за клавиатуру компьютера и вводит данные по мере их поступления в специально заготовленную электронную таблицу (рис. 1), которая автоматически подсчитывает частоты событий «случилось ровно k вылетов», находит среднее значение и стандартное отклонение полученного массива данных.

Пока данные вводятся в таблицу, я прошу присутствующих следить за тем, как меняются числа в ячейках Т4 и Т5: они довольно быстро приближаются к 6 и к 5,48, — гораздо быстрее, чем частоты (синие столбики) приближаются к своим теоретическим вероятностям (черные контурные столбики) на диаграмме.

Убедив участников игры в том, что среднее число вылетов сходится к своему математическому ожиданию быстрее, чем частоты отдельных значений (проявление закона больших чисел), я перехожу к главному вопросу — о везении и невезении.

Какое число бросков в этом опыте следует считать типичным, какое — умеренным везением, а какое — чистым, истинным и даже выдающимся?

Договорившись считать, что невезением является 1–2 броска (и это самые вероятные значения), и рассматривая диаграмму, все склонны считать, что типичные значения концентрируются в промежутке от 1 до 13–18. Дальше, как правило, начинаются «белые пятна». Визуальная граница области концентрации вероятности, разумеется, немного зависит от того, как именно развивался эксперимент. Нужны более объективные соображения.

Наиболее простая и общая идея — воспользоваться в качестве единицы измерения случайной величины ее же собственным стандартным отклонением. Например, будем считать, что значения X, попадающие в промежуток

$$\text{от } \mathrm{E}X - 2\sqrt{\mathrm{D}X}$$

$$\text{до } \mathrm{E}X + 2\sqrt{\mathrm{D}X},$$

— наиболее типичные, а значения, которые удалены от $\mathrm{E}X$ более чем на $3\sqrt{\mathrm{D}X}$, не заслуживают доверия. При таком выборе правила для определения везучести следует признать, что значения

от $6 - 2 \cdot 5{,}48 = -4{,}96$ до $6 + 2 \cdot 5{,}48 = 16{,}96$,

то есть натуральные значения от 1 до 16, наиболее типичны. Это более-менее согласуется с визуальным восприятием.

Проявлением истинного везения следует считать значения, которые больше, чем

$$6 + 3 \cdot 5{,}48 = 22{,}44,$$

то есть значения 23 и выше. Значения от 17

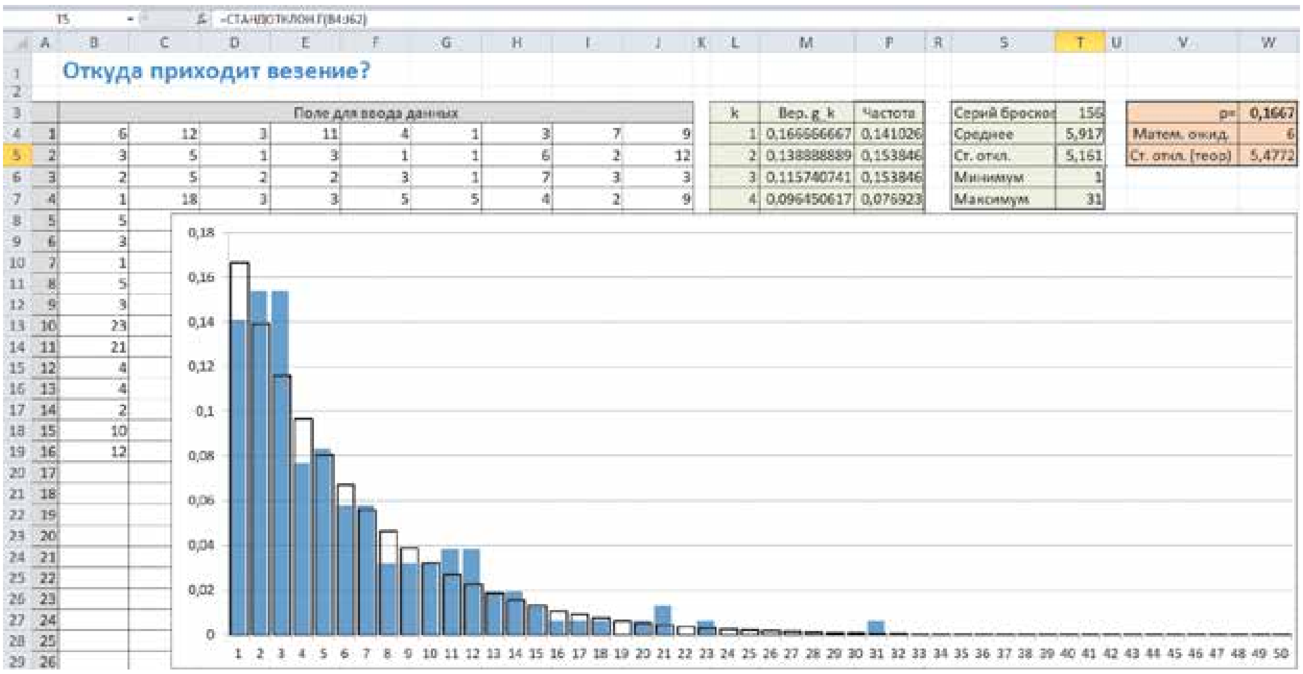

Рис. 1. Заполненная страница практической работы «Откуда приходит везение?». Массив данных объемом 156 собран не за один раз

до 22 тем самым превращаются в область умеренного везения (рис. 2).

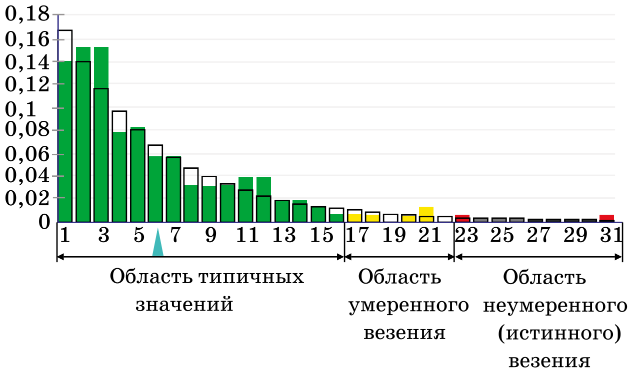

Рис. 2. Разбиение степени везения на условные области. Синий треугольник отмечает математическое ожидание числа бросков

В опыте, который мы провели, отличились два действительно везучих «пилота». Один бросал кубик 23 раза — это много. А другой совершил 31 «полет», прежде чем потерпел неудачу, то есть выпала шестерка. Вот это и правда здорово. Такое бывает нечасто: при $p = \frac{1}{6}$ вероятность превышения значения 30 равна примерно 0,004, так что наличие такого везунчика в выборке из 156 «пилотов» само по себе почти выдающееся явление.

Границы везения можно определить иначе. Например, можно считать границей истинного везения такое наименьшее число k, что вероятность превышения этого числа мала. Например, пусть

$$P(X > k) \le 0{,}01$$

(вероятность можно выбрать по вкусу). Получается неравенство

$$(1 - p)^k < 0{,}01,$$

откуда

$$k > \log_{\frac{5}{6}} 0{,}01 = \frac{2\ln 10}{\ln 6 - \ln 5} \approx 25{,}26,$$

$$k = 26.$$

При таком выборе решающего правила везунчик у нас остался бы единственным — тот, кто бросал кубик 31 раз.

Разобравшись с границами везения и невезения, то есть приняв некоторое правило и выделив области в соответствии с ним, мы вправе спросить себя: а могло ли случиться так, что везунчиков сегодня в нашей серии полетов не было бы?

И тут мы подходим к самому интересному во всей этой истории. Везунчик обязан быть! Одному-двум обязательно должно крепко повезти. Почему? Обратите внимание на синий треугольник на рисунке 2. Им отмечено среднее число вылетов (около 5,92). С физической точки зрения — это центр тяжести диаграммы, относительно которого она находится в равновесии (подвесьте диаграмму мысленно за эту точку). Зеленая часть диаграммы сильно перекошена влево — большинство пилотов не дотягивают до среднего числа вылетов. Желтая область не спасает. Часть диаграммы левее среднего (левое плечо) короткая и тяжелая. Значит, правое плечо, будучи легким, должно быть длинным, чтобы уравновесить диаграмму. Известный из физики закон рычага: если хочешь компенсировать тяжелый груз легким, сделай длинный рычаг.

Таким образом, если бы среди присутствующих не было ни одного везунчика, центр тяжести диаграммы не смог бы находиться вблизи числа 6. А он должен быть там, поскольку иначе закон больших чисел оказался бы нарушен. Закон больших чисел — закон природы, и его нельзя нарушать. Диаграмма должна быть сбалансирована относительно точки, близкой к 6. Значит, где-то далеко справа должно быть хотя бы одно значение. Этот один везунчик (может, два) своим редким везением уравновешивает невезение абсолютного большинства.

Выводы из такого занятия довольно нетипичны для урока математики.

Вывод 1. Везение приходит из закона больших чисел, и в силу этого закона оно к кому-то приходит обязательно.

Справедливость в том, что никому заранее не известно, кому где повезет, первоначально шансы у всех были равны.

Вывод 2. Часто полосы везения (в силу симметричности и невезения) в жизни гораздо длиннее, чем можно было бы ожидать, исходя из здравого смысла.

Поясним. Мы умеем оценивать *среднюю продолжительность светлой полосы*, опираясь на здравый смысл и опыт. А вот реально возможное отклонение от среднего — нет. Для простоты и наглядности примера предположим, что некоторая неприятность может случиться в любой день, но вероятность p ее в каждый отдельный день мала. Пусть, для определенности, $p = 0{,}01$. Тогда математическое ожидание протяженности полосы везения равно 100 дням, и это легко согласуется с нашими представлениями о том, как устроена справедливость в жизни. Но человек, слишком долго испытывающий судьбу в таких условиях, после 150–200 дней сплошного везения начинает ощущать себя удивительным везунчиком: шутка ли — 50 или даже 100 дней везения сверх лимита! На самом деле это ложное ощущение.

Стандартное отклонение в этом случае

$$\frac{\sqrt{1-p}}{p}=\frac{\sqrt{0{,}99}}{0{,}01}=\sqrt{99\cdot 100}\text{ дней,}$$

что мало отличается от 100 дней. Таким образом, превышение длительности везения на 100 дней над средним не является выдающимся. И даже полоса везения в 300 дней не является в этих условиях чем-то из ряда вон выходящим, хотя любой сторонний наблюдатель и даже сам везунчик под влиянием эмоций считают иначе. Истинным везением для везунчика здесь является не то, что везение длительное, а то, что везет именно ему.

Если смысловые ударения на уроке сделаны правильно и мы успели сделать все намеченное, то школьники выходят из класса довольно задумчивыми.

Теперь пора рассказать, кто такая, собственно, строгая учительница и какое отношение она имеет ко всему этому. Хотя, в принципе, дальше можно и не читать, поскольку дальнейший рассказ посвящен тому, как провести описанную практическую работу *неправильно*.

Кто такая строгая учительница

Собственно говоря, учительница, наверно, не такая уж и строгая, да и задача вовсе не о ней. На одном из учительских семинаров я попросил всех бросать кубик до шестерки ровно два раза, поскольку учителей в группе было около тридцати. Как мы уже понимаем, многие довольно быстро заканчивают свои броски и после этого ждут тех, кто продолжает бросать, а потом мы все вместе ждем, пока закончит свои броски выявившийся везунчик. Немалых сил стоит убедить его или ее не смущаться («Я всех задерживаю!»), не спешить, а спокойно дожидаться шестерки («Ой, а вдруг я так и буду бросать без конца?»).

Одной из учительниц работа так понравилась, что она повторила ее в своем классе и потом написала мне письмо, в котором подробно рассказала, как хорошо и интересно все прошло. Но учительница, что называется, доработала регламент. Она усовершенствовала опыт: попросила своих учеников бросать кубик не ровно две или три серии до шестерки, а *ровно пять минут*, отмечать выпадение шестерок и каждый раз записывать, через сколько бросков случилась очередная шестерка. Мотивация понятна: все заняты, никто никого не ждет, а в классе царят порядок и дисциплина.

После этого учительница взяла числа, записанные школьниками, и построила распределение величины X «число бросков до первой шестерки».

Задача о строгой учительнице

Действительно ли в проведенном опыте с ограничением времени бросания моделируется геометрическое распределение? Если нет, то какое распределение получается и почему?

Этот вопрос был предложен как одна из тем в конкурсе эссе на олимпиаде по теории вероятностей в 2020/21 учебном году. В ответ мы, то есть оргкомитет, получили несколько сочинений, среди которых выделялось эссе, написанное Александрой Нестеренко, на тот момент ученицей 8-го класса. Язык сочинения был очень детский, некоторые существенные объяснения Саша проглатывала, вероятно, еще плохо владея техникой доказательств, зато многие тривиальные преобразования разжевывала, как учат в школе. Я потратил больше недели, разбираясь в тексте и переводя его на язык, понятный хотя бы математикам. Временами я впадал в отчаяние, поскольку видел, что выводы отличаются от моих, но я не могу найти ошибку или даже место, где она должна быть. Упорно и медленно я распутывал квест. Снисходительность, которой всегда немного грешат учителя, подходя к школьному сочинению, быстро исчезла и уступила место глубокому уважению и жгучему желанию разобраться полностью.

До чтения сочинения Александры[1] я не без оснований (как выяснилось, ошибочных) полагал, что получающееся у строгой учительницы распределение R случайной величины X «число бросков до получения шестерки» — это «обрезанное геометрическое» или «конечное геометрическое», если можно так выразиться. Разумеется, конечное, поскольку число бросков ограниченно. Одно это указывает на то, что настоящего геометрического распределения у строгой учительницы получиться не могло. Но какое получилось?

Рассмотрим одного ученика, рассуждал я. Будем считать, что максимальное число бросков равно m. Тогда (и это действительно так)

$$r_1=\mathrm{P}(X=1)=\alpha p,$$
$$r_2=\alpha qp,\ \ldots,\ r_k=\alpha q^{k-1}p$$

и так далее вплоть до $r_m=\alpha q^{m-1}p$, а при $k>m$ все $r_k=0$.

Здесь p — вероятность успеха в каждой попытке. В случае бросания кубика $p=\frac{1}{6}$ $q=1-p$ — вероятность неудачи, а α — множитель, который обеспечивает то, что сумма всех вероятностей равна 1.

[1] Полный текст находится на странице олимпиады: ptlab.mccme.ru/sites/ptlab.mccme.ru/files/essay_35.pdf

После получения очередной шестерки каждый ученик начинает очередную серию бросков, но более короткую (времени осталось меньше), и она может окончиться шестеркой, а может пропасть впустую, и тогда ее просто отбросим. Поэтому m и α для каждой серии бросков у каждого ученика свои. Тогда некоторое среднее всех α по всем результативным сериям (с шестеркой в конце) равно некоторому числу A, которое зависит от всех m. В результате должно получиться, что

$$r_k = Aq^{k-1}p, \text{ при } k \le M, \qquad (1)$$

где M — некоторое довольно большое число. При этом

$$A = (1 - q^M)^{-1},$$

что легко получить из условия, что сумма всех вероятностей равна 1.

Я уже не помню точно, так я рассуждал или не совсем так, поскольку по прошествии длительного времени очень трудно верно воспроизвести ход *ошибочных* рассуждений. Александра пошла другим путем. Из интуитивных и весьма эфемерных соображений она нашла, что

$$r_k = q^{k-1}p + \frac{1-kp}{L}q^{k-1}, \text{ при } k \le L, \qquad (2)$$

где L — среднее число бросков, которые ученики успевают совершить в отведенное время.

Различие между (1) и (2) кардинальное: если, как прежде, обозначить правильную вероятность серии длиной k в геометрическом распределении $G(p)$ через

$$g_k = q^{k-1}p,$$

то у меня получилось, что вероятность r_k отличается от g_k множителем:

$$r_k = g_k \cdot A,$$

а у Александры вышло, что они отличаются сдвигом, который к тому же зависит от k:

$$r_k = g_k + \frac{1-kp}{L}q^{k-1}.$$

Конечно, с ростом M и L оба выражения приближаются к g_k, то есть в пределе мы оба были правы, но это только в пределе. Сначала я решил, что у Саши где-то ошибка. Потом понял, что я не вижу убедительных рассуждений, но не могу найти ошибку в неубедительных. Тогда я занялся компьютерным моделированием, которое раз за разом подтверждало Сашину правоту. Теперь я искал ошибку уже у себя и наконец нашел.

Ошибка оказалась поучительной. Дело в том, что данные не являются частотами из повторяющихся последовательностей бросков, а частоты событий «серия длины k» собираются по всему классу, где кости бросают ученики с номерами i от 1 до n, и каждый из них получает в результате своей деятельности Y_i серий, оканчивающихся шестеркой, из которых $X_{i,k}$ имеют длину k.

Тогда частотная оценка вероятности зависит от всех Y_i и $X_{i,k}$, то есть искомое распределение имеет векторный параметр $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, ..., L_n)$, содержащий длины всех последовательностей бросков, выполненных классом. В эксперименте, проведенном на уроке, получились оценки вероятностей какого-то из таких распределений:

$$\hat{r}_{\boldsymbol{L},k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}.$$

Говоря о каком-то распределении, я имею в виду то, которое получилось при конкретном случившемся векторе $\boldsymbol{L}$, который реализовался на том уроке.

Чтобы понять, с чем мы имеем дело, разумно найти предельное распределение при $n \to \infty$, считая, что все случайные компоненты L_i имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием $\mathrm{E}L$. Перейдем к пределу по вероятности[2]. С одной стороны,

$$\hat{r}_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} r_k,$$

а с другой,

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i,k}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{n} X_{i,k}}{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{n} Y_i} = \frac{n\mathrm{E}X_k}{n\mathrm{E}Y} = \frac{\mathrm{E}X_k}{p\mathrm{E}L}.$$

Предпоследнее равенство вытекает из естественного предположения, что все величины $X_{i,k}$ имеют одно и то же распределение с математическим ожиданием $\mathrm{E}X_k$, где X_k — число серий длины k в случайной последовательности бросков до первой шестерки, полученной случайным школьником, и что все величины Y_i также распределены одинаково и имеют математическое ожидание $\mathrm{E}Y$ (Y — общее число серий в этой случайной последовательности).

Обозначим среднее число бросков $\mathrm{E}L$, сделанных учеником, просто L. Это, конечно, нехорошо, но не вызывает путаницы. В интерпретации с бросанием костей в классе такой переход можно оправдать предположением, что все бросают кубики с одинаковой скоростью, например, раз в три секунды, повинуясь ритмичному движению учительских бровей.

Тогда предельное распределение R получает скалярный параметр L, как и хотела Саша. А за-

[2] Предел последовательности a_n по вероятности — это такое число a, что вероятность события «a_n отличается от a больше, чем на ε», то есть $\mathrm{P}(|a_n - a| > \varepsilon)$ стремится к нулю с ростом n для любого $\varepsilon > 0$. В частности, закон больших чисел утверждает, что частота события сходится по вероятности к его вероятности, а среднее арифметическое наблюдений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

кон больших чисел совместно с единственностью предела дает для «распределения Нестеренко» R функцию вероятности

$$r_k = \frac{\mathrm{E}X_k}{pL}.$$

Осталось найти числитель $\mathrm{E}X_k$ правой части. Каждая серия длины k начинается с какого-то броска. Пусть I_j — индикатор события «серия длины k началась с броска номер j» (следовательно, закончилась броском номер $j + k - 1$):

$$\mathrm{E}I_j = \mathrm{P}\left(I_j = 1\right) = \begin{cases} q^{k-1}p \text{ при } j = 1, \\ p \cdot q^{k-1}p = q^{k-1}p^2 \text{ при } 1 < j \le L - k + 1, \\ 0 \text{ при } j > L - k + 1. \end{cases}$$

Тогда, переходя к математическим ожиданиям в равенстве $X_k = \sum\limits_{j\ge 1} I_j$, получаем:

$$\mathrm{E}X_k = q^{k-1}p + (L - k + 1 - 1)q^{k-1}p^2 = \\ = ((L - k)p + 1)q^{k-1}p,$$

откуда

$$r_{k,L} = \frac{(L-k)p+1}{L} q^{k-1} = q^{k-1}p + \frac{1-kp}{L} q^{k-1}, \qquad (3)$$

что совпадает с выражением (2), которое Саша нашла посредством прозрения или поразительных догадок. О достоинствах множителя $\frac{1-kp}{L}$ Саша пишет: «Если бы надо было придумать выражение, которое меняет знак с ростом k и уменьшается с ростом L, то проще не получилось бы, наверное».

Интересна еще фраза в заключении Сашиного эссе: «Нечестный эксперимент в данных условиях может измерять геометрическое распределение даже с большим успехом, чем честный».

Сравним правильное распределение $G(p)$ и искаженное распределение $R(L, p)$ графически. Возьмем для определенности $p = \frac{1}{6}$ и $L = 50$ (рис. 3). Эти параметры можно менять в ячейках I3 и I4 электронной таблицы. Обратите внимание: математическое ожидание и стандартное отклонение у распределения $R(L, p)$ меньше, чем у $G(p)$. Это понятно — распределение R «перекошено» влево по сравнению с геометрическим.

Уже при $L = 50$, то есть если на бросания дано примерно 3 минуты (в среднем около 3,5 секунды на бросок), распределения отличаются мало. Различие меньше, чем случайная изменчивость частот при собственно геометрическом распределении (см. рис. 1). Оттого существенных различий в результатах правильного и неправильного опытов не наблюдается. Потому Саша и пишет, что нечестный эксперимент хорошо измеряет геометрическое распределение. Но мы не хотим агитировать за нечестность. Так не нужно проводить игру «Откуда приходит везение?»

Хотя, положа руку на сердце, я тоже согласен с тем, что при такой организации опыта дисциплина в классе крепче.

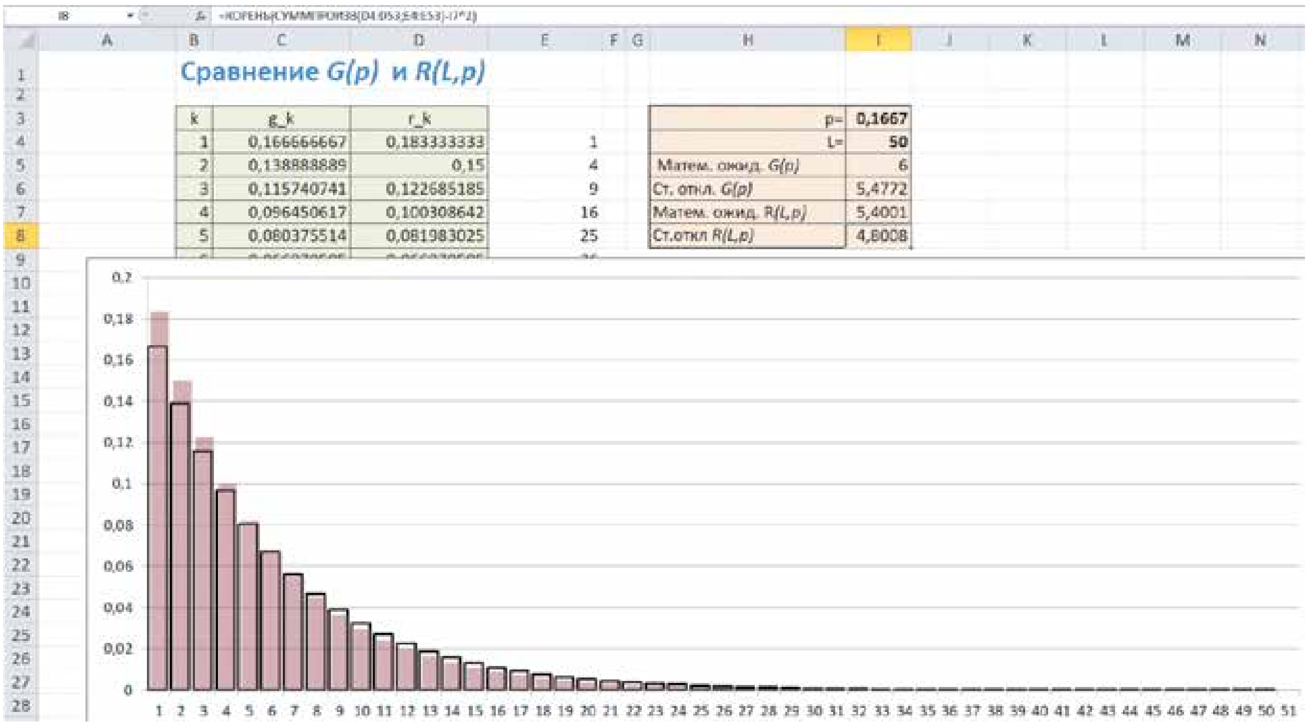

Рис. 3. Сравнение правильного геометрического распределения $G(p)$ (черные контурные столбики) и искаженного $R(L, p)$ (коричневые столбики) при $L = 50$, $p = \frac{1}{6}$