

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

Задача о саженцах и овербукинге

Юбилей Розы Яковлевны

У Розы Яковлевны юбилей — 50 лет, и ее сын Андрей решил сделать подарок — посадить на даче перед домом вдоль дорожки ровно 50 розовых кустов. «Если сейчас посажу, — думал Андрей, — то в августе будут цветы, как раз к юбилею».

Сам про себя Андрей часто шутил, что хорошо отличает березу от лопуха в светлое время суток. Дальше его познания в ботанике не простирались. Поэтому пришлось идти за консультацией к великому цветоводу — соседу по даче Никите, из разговора с которым Андрей уяснил, что саженцы нужно брать с запасом.

— Никит, какой запас нужен? Пять, десять?

— Да кто ж его знает? Как пойдет. Я-то помогу. Притенить сперва нужно, и поливать. А рядом хорошо чтоб шалфей, и рыхлить-рыхлить. Только земля у нас здесь не очень для роз-то. Эта... кислотность у нас... Потому и всхожесть¹... Вот если б гвоздики...

— Мою маму зовут Роза, а не Гвоздика. Мне розы нужны. Ты когда у себя сажал, сколько погибло?

— Из десятка один-то не пойдет. То ли грибок... а может быть...

Еще Никита подробно объяснил, где купить саженцы, на что смотреть, как щупать корни, как везти добычу в багажнике. Андрей решил, что понял главное и что дальнейший разговор определенно сведет его с ума. Он, конечно, воспользуется помощью Никиты, но сейчас нужно понять, сколько купить саженцев.

«Будем считать, — размышлял Андрей по дороге, — что приживается 90% саженцев. Нет, пожалуй, нет у меня зеленого пальца, как у Никиты, потому будем считать, что всхожесть 80%». Сначала Андрей решил, что нужно 63 саженца, чтобы 80% от этого числа как раз и было 50. Но что-то свербило, и ощущение, что задача решена, не приходило.

«Вот был бы я философом, никаких бы сомнений не было», — с усмешкой подумал Андрей. Математическое образование Андрей получил в институте и практически не пользовался им с тех пор, работая в торговой сети. Но рациональное мышление — это как ездить на велосипеде: раз научился, не разучишься. Мысли потекли упорядоченно, примерно в том же темпе, в каком убегали назад фонарные столбы вдоль автомагистрали. Из глубин памяти постепенно всплывали казалось прочно забытые знания, но не в виде формул, а в виде фактов и образов, которые естественным образом облекались в равенства.

«Если саженцев 63, а всхожесть 0,8, то приживется $63 \cdot 0,8 \approx 50$ в среднем. А мне нужно не в среднем, а чтоб без разговоров. Совсем без разговоров не получится: сколько бы саженцев ни было, теоретически может случиться, что не приживется ни один. Но это голая теория. А мне нужна практика. Если нельзя решить задачу наверняка, то ее нужно решить почти наверняка, скажем, с вероятностью 0,95 или 0,99, как кому нравится». Эта фраза институтского преподавателя теории вероятностей вдруг прозвучала в голове Андрея со всем богатством интонаций. Андрей с нежностью улыб-

¹ Всхожесть — доля прижившихся посадок, то есть вероятность того, что посаженное семя или саженец приживется.

нулся, вспомнив подслеповатую пожилую те-тушку-профессора, которая блестяще знала свой предмет, умела сделать так, что даже самый бес-толковый студент понимал и решал задачи, хотя сама по рассеянности с первого раза не могла ре-шить без ошибки ни одной.

Выходя на заправке из машины, Андрей за-хватил с собой ноутбук. Взял кофе, примостился за крохотным столиком, запустил Excel и через пять минут выяснил, что 63 саженцев мало: ве-роятность того, что приживется меньше 50, при-мерно 0,377, а это много. Подумав еще минуту, Андрей получил ответ на свой вопрос, но в ажи-тации неловко двинул рукой, задел рукавом ста-канчик, и сладкий кофе вылился на клавиатуру. Кофе и ноутбук несовместимы!

Задача 1. Всхожесть саженцев 80%. Сколько нужно купить саженцев, чтобы прижилось хотя бы 50 из них с вероятностью 0,95 или больше?

Решение. Задача по сути обратна задаче стю-ардессы (Математика, № 4, 2023). У стюардес-сы Тани было известное количество пассажиров-испытаний, и она ставила вопрос о том, хватит или не хватит порций с курицей всем желаю-щим. У Андрея, наоборот, число успехов задано: 50 или больше. Зато неизвестно число испыта-ний n , из которых хотя бы 50 должны окончить-ся успехом при условии, что вероятность успеха $p = 0,8$.

Число успехов привычно обозначим S_n (ин-декс n добавим, чтобы подчеркнуть, что S зави-сит от неизвестного числа испытаний n) и запи-шем неравенство

$$P(S_n \geq 50) \geq 0,95,$$

откуда

$$P(S_n \leq 49) \leq 0,05,$$

что одно и то же. Если число 0,95 можно считать надежностью прогноза, то число 0,05 — допу-стимая вероятность фиаско.

Запишем полученное неравенство в разверну-том виде:

$$C_n^0(1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2(1-p)^{n-2} + \dots \\ \dots + C_n^{49} p^{49}(1-p)^{n-49} \leq 0,05, \quad (1)$$

только для того, чтобы понять, что нечего и мечтать решить его алгебраически. Но в элек-тронных таблицах есть стандартная функция БИНОМ.РАСП, которая выполняет вычисле-ния по этой формуле моментально с ничтожной ошибкой, которая намного меньше погрешно-сти, возникающей при использовании прибли-жения нормальным распределением.

В нашем случае число успехов 49 или мень-ше, вероятность успеха 0,8, а число испытаний n нужно подобрать. Сначала поставим $n = 63$, ис-ходя из рассуждений, которые уже провел Ан-дрей (рис. 1):

Задача о саженцах	
p=	0,8 - всхожесть (вероятность того, что саженец приживется)
n=	63 - нужно купить саженцев
k=	50 - саженцев приживется
Надежность	
P(S<k)=	0,377444
	0,622556

Рис. 1

Обратите внимание: последний аргумент у функции равен единице. Это нужно, чтобы электронная таблица вычислила всю сумму в ле-вой части равенства от нулевого слагаемого до 49-го. Если поставить вместо единицы число 0, то функция вычислит только последнее слагае-мое, то есть вероятность того, что $S_n = 49$ в точ-ности.

Вероятность в ячейке C9 нужно сделать не больше 0,05. То есть нужно увеличивать n до тех пор, пока это не случится. Сначала ка-жется, что n нужно увеличить сильно, посколь-ку вероятность нужно уменьшить в семь с лиш-ним раз. Однако это неверно, зависимость здесь далеко не линейная. Действуем простым под-бором (рис. 2): 75 саженцев много, 68 — мало, 69 — как раз.

Подбор оказывается коротким: вероятность в ячейке C9 падает с ростом n стремительно.

Таким образом, Андрею потребуется не 13, а 19 запасных саженцев. Если же он решит,

n=75		n=68		n=69	
Задача о саженцах		Задача о саженцах		Задача о саженцах	
p=	0,8	p=	0,8	p=	0,8
n=	75	n=	68	n=	69
k=	50	k=	50	k=	50
Надежность		Надежность		Надежность	
P(S<k)=	0,0021475	P(S<k)=	0,0726933	P(S<k)=	0,0476133
	0,997852		0,927307		0,952387

Рис. 2

что 0,95 слишком мало, и захочет повысить свою уверенность до 0,99, то саженцев потребуется больше. С помощью приложенного файла Excel убедитесь в том, что для достижения вероятности 0,99 придется купить 73 саженца — еще на четыре больше. Таким образом, вопрос, как всегда и везде, сводится к поиску компромиссного решения: слишком много — дорого, а меньше — ненадежно. Конечно, если Андрей может позволить себе купить много лишних саженцев, то с надежностью у него проблем не будет: проверьте, что 80 саженцев дают уверенность больше 0,9999. Что делать с лишними розовыми кустами? Подарить Никите в благодарность за помощь. Или пересадить в другое место. Не проблема.

Прав ли Мич?

В замечательной книге «Физики продолжают шутить» (Конобеев Ю., Павлинчук В., Работнов Н., Турчин В. — М.: Мир, 1968) собраны очерки в жанре научного юмора, как это определяют авторы. Один из очерков (Дональд Мич) посвящен знаменитому закону Мэрфи, который гласит, что если какая-нибудь неприятность может случиться, она случается.

Любой ученый... сразу признает справедливость и общность закона Мэрфи, даже если он ранее не встречался с его четкой словесной формулировкой.

Что же делать? Как с этим бороться? Совершенно ясно, что учитывать закон Мэрфи надо в момент составления плана новых исследований. Предположим, вы теоретически рассчитали, какое количество материала вам надо переработать, чтобы получить необходимую информацию. Пусть это теоретическое значение равно X . Это может быть число крыс, которых следует вскрыть, или акров, которые нужно засеять, или образцов почвы, которые необходимо собрать, и т.д. После этого вы пытаетесь разумным образом учесть все, что может помешать. Пусть каждая отдельная причина маловероятна, все вместе они могут дать, скажем, 30% брака. Поэтому вы решаете увеличить свою смету в 1,43 раза по сравнению с теоретической оценкой (после 30%-й усушки и утряски $1,43X$ превращается как раз в X). Множитель, вводимый на этом этапе, я буду называть коэффициентом разумности и обозначать буквой R .

После этого обычно составляется окончательный план, но о его окончательности еще придется пожалеть. Оказывается, с одной стороны, некоторые из потенциальных неприятностей не материализовались, но, с другой сто-

роны, значительная часть закупленных крыс скончалась в ужасных конвульсиях, а один ваш коллега спутал препарированные органы, хранившиеся в холодильнике и снабженные этикетками, с кормом для золотых рыбок и действовал в дальнейшем под влиянием этого заблуждения...

Профилактика против таких несчастий заключается в употреблении коэффициента Мэрфи M вместо R . Между ними существует простая связь: $M = R^2$.

Это означает, что в нашем гипотетическом случае, когда идеально неопытный человек купит 100 крыс, а «рационалист» приобретет 143, Мэрфи заказал бы 204 штуки.

Боюсь показаться занудой, но все же сформулирую следующее утверждение.

Утверждение об избыточности коэффициента Мэрфи. При $X \geq 100$ коэффициент разумности R действительно недостаточен, а коэффициент Мэрфи $M = R^2$ избыточен, даже если считать, что материала должно хватить с вероятностью не меньше 0,999.

Овербукинг

Однако встречаются ситуации, когда запас становится проблемой. С такой задачей сталкиваются аналитики авиакомпаний, когда планируют овербукинг.

Что такое овербукинг? По-русски это переказ или сверхказ. Давно известно, что примерно 10% пассажиров не являются на рейс, не ставя в известность авиакомпанию. У кого-то в последний момент резко изменились планы, кто-то заболел. Эти пассажиры потом принесут справку от врача и потребуют возврата денег за несовершенный полет, но от этого легче не станет, а самолет отправится недозагруженным, не исключено, что в пиковый сезон.



Поэтому многие компании, особенно лоукостеры², практикуют овербукинг — продают на рейс больше билетов, чем мест в салоне самолета. При этом, разумеется, возникают коллизии: иногда пассажиров приходит больше, чем вмещает самолет. Что делать? Выход один: отказать пассажиру в перевозке. Разумеется, чаще отказывают пассажирам без детей; компания не откажет «золотому» пассажиру, имеющему высокий рейтинг в программе лояльности (если таковая есть у компании). Скорее всего, откажут пассажирам, купившим самые дешевые билеты по какому-нибудь специальному «легкому» тарифу. При этом в договоре, скорее всего, написано, что в случае необходимости авиакомпания имеет право отказать в перевозке. Она либо вернет деньги, либо отправит пассажира к месту назначения при первой возможности своим рейсом или рейсом дружественной авиакомпании. Но кто ж читает договоры до конца?

Ровно такой случай был у автора этих строк в 2016 году с одной чешской авиакомпанией. Небольшой самолет был забит до отказа. Девушка за стойкой почти злорадно сказала, что я пришел на регистрацию слишком поздно, а тариф, по которому агентство продало мне билет, негарантированный. Самое интересное началось, когда девушка выяснила, что не может отказать: у меня была привилегированная карта альянса авиакомпаний, куда входит и этот чешский авиаперевозчик. С рейса сняли другого пассажира, бедняга узнал об отказе уже при посадке в самолет.

Продажа билетов с овербукингом похожа на покупку запасных саженцев. Разница в том, что Андрей несильно беспокоится о лишних саженцах, а авиакомпания не может себе позволить много лишних пассажиров: это уронит ее и без того невысокий рейтинг, может спровоцировать беспорядки и стихийные митинги в аэропорту, жалобы в вышестоящие организации. Тогда за компанию, злоупотребляющую овербукингом, возьмутся уже не разгневанные пассажиры, а раздраженные авиационные власти.

Значит, с одной стороны, нужно продать как можно больше билетов, а с другой стороны, не допустить, чтобы в аэропорту скопилось много недовольных пассажиров.

Задача 2. В самолете 200 мест. Вероятность спонтанного отказа пассажира от полета рав-

² Лоукостер — авиакомпания, привлекающая пассажиров низкими ценами на билеты. Как правило, дешевые билеты отягощены множеством условий и ограничений: нет питания, не разрешен багаж, самолет на дальней стоянке, частые задержки рейсов — экономия на аэропортовском сборе, не откидываются спинки сидений — экономия на времени уборки салона, не разрешен возврат билетов, нет гарантий перевозки в назначенный день и т.п.

на 0,1. Какое наибольшее количество билетов следует продать, чтобы на рейс явилось не больше 200 пассажиров с вероятностью 0,99 или выше?

Авиакомпания готова как-то уладить неприятности с одним-двумя пассажирами, оставшимися без мест, но такое должно случаться редко. Ясно, что решение очень похоже на решение задачи о саженцах. Отличие в том, что Андрей хочет купить как можно меньше саженцев, а компания хочет продать как можно больше билетов. Решение предоставляю читателю, в приложенной Excel-таблице есть страница «Задача об овербукинге» с уже готовыми формулами. Проверьте *ответ*: 212 билетов.

Задача 3. В условиях предыдущей задачи и найденного числа проданных билетов найдите вероятность того, что при регистрации на рейс окажется ровно один лишний пассажир.

Мы уже говорили о том, что гарантий нет: задача 2 решена не наверняка, а почти наверняка. Лишний пассажир может случиться. Решите задачу 3 с помощью Excel. *Ответ*: 0,00475... То есть улаживать проблемы с одним пассажиром придется примерно 5 раз на тысячу рейсов. Не так много.

Два лишних пассажира при этом имеют вероятность около 0,002, поэтому умиротворять двоих авиакомпании придется примерно 2 раза на тысячу рейсов.

Казалось бы, почему не потребовать, чтобы число явившихся пассажиров было ограничено не только сверху, но и снизу? Скажем, можно захотеть, чтобы число пришедших на рейс пассажиров находилось в промежутке от 195 до 200. Это жадная постановка задачи. Проблема в том, что добиться этого с наперед заданной большой вероятностью невозможно. Но можно поставить вопрос иначе: при каком числе проданных билетов вероятность события «пассажиров от 195 до 200» наибольшая. Самостоятельно измените таблицу для решения этой задачи и решите ее.

Задача 4. При каком числе проданных билетов в условиях задачи 2 вероятность события «число пришедших на рейс пассажиров от 195 до 200» окажется наибольшей? Чему равна эта наибольшая вероятность?

Ответ: 219 билетов; вероятность 0,502.

Неприятность в том, что при таком подходе к овербукингу вероятность события «будут лишние пассажиры» равна примерно 0,23, а это очень много — жадная политика оказывает рисканной.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для сборки нового шкафа требуется 24 одинаковых болта. Известно, что в среднем из 100 болтов один бракованный (резьба отсутствует или нарушена). Сколько запасных болтов нужно положить в комплект фурнитуры, чтобы с вероятностью 0,999 болтов хватило?

2. На борту самолета ровно 100 пассажирских кресел. Рассчитайте наибольшее количество билетов, которые нужно продать на рейс, выполняемый этим самолетом, считая, что в среднем на регистрацию приходит 90% пассажиров и что лишних пассажиров не должно быть с вероятностью 0,99. Какова вероятность того, что при этом все же придет на 2 пассажира больше, чем вмещает самолет?

3. Проверьте утверждение об избыточности коэффициента Мэрфи.

Ответы к задачам

из статьи «Задача стюардессы»

1. 0,379. 2. 12. 3. 11.

4. *Доказательство.* Пусть $m > 1$. Докажем первое неравенство:

$$C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{m! \cdot m!} = \frac{(m+1) \cdot (2m)!}{m \cdot (m-1)! \cdot (m+1)!} = \frac{m+1}{m} \cdot C_{2m}^{m+1} < 2C_{2m}^{m+1}.$$

Осталось показать, что $C_{2m}^{m+1} > C_{2m}^{m+2} > \dots > C_{2m}^{2m}$.

$$C_{2m}^{m+1} = \frac{(2m)!}{(m+1)! \cdot (m-1)!} = \frac{(m+2) \cdot (2m)!}{(m-1) \cdot (m+2)! \cdot (m-2)!} = \frac{m+2}{m-1} C_{2m}^{m+2} > C_{2m}^{m+2}.$$

Аналогично доказываются последующие неравенства цепочки.

5. *Указание.* Если проделать все выкладки аналогично тому, как это сделано для четного n , то получится:

$$EY \approx \frac{n}{\sqrt{2\pi(n-1)}} - \frac{1}{2}.$$

Это выражение асимптотически не отличается от $\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ в том смысле, что предел их отношения стремится к 1.

6*. *Доказательство.* Пассажир k недоволен, если произойдут два события.

1. Из прочих $(2m-1)$ пассажира ровно $j \geq m$ предпочитают то же, что и пассажир k . Вероятность этого

$$C_{2m-1}^j \frac{1}{2^{2m-1}}.$$

2. При условии события 1 стюардесса подойдет к пассажиру k уже после того, как у нее кончатся все m касалеток с нужным блюдом, А именно — он должен оказаться среди $(j+1-m)$ последних в очереди на обслуживание. Вероятность этого³

$$\frac{j+1-m}{j+1} = 1 - \frac{m}{j+1}.$$

Умножая вероятности событий 1 и 2 и складывая произведения при всех $j = m, m+1, \dots, 2m-1$, получаем нужное равенство.

Упрощение до

$$EI_k = C_{2m}^m \frac{1}{2^{2m+1}}$$

имеет технический характер и во многом повторяет выкладки, сделанные в статье.

³ Здесь мы предполагаем, что пассажир окажется в случайном месте салона. Например, проводим все рассуждения до регистрации на рейс. Как только пассажиры заняли места в салоне, равновероятности уже нет, чем ближе к хвосту самолета сидит пассажир, тем выше шансы того, что ему выбранного блюда не хватит.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам. Требования к оформлению статьи:

- Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.

- Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

- Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

- Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10×15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800×600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).