Задача 9

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Задача стюардессы

Скинув жесткие форменные туфли, Таня приткнулась на откидном стульчике в кухоньке, прислонившись к прохладной пластиковой панели. Как это страшно и здорово: в десяти сантиметрах от ее головы ревет разреженный ледяной воздух, разорванный на куски крылом, бешено закрученный, обожженный и отброшенный назад чудовищной силой турбин.

Танина бабушка называла инверсионный след самолета небесной дорожкой. А маленькая Таня, услышав гул в небе, задирала голову, долго смотрела на тающую небесную дорожку и мечтала стать стюардессой. Теперь говорят «бортпроводники». Или хуже того — «кабинный экипаж».

Никто внизу не любуется на дорожку, которую они оставляют в небе: ночь. Кое-кто из пассажиров упрямо смотрит кино, но большинство пытается спать, кое-как утрамбовав себя в прямоугольник 72 на 50 сантиметров: самолет забит до отказа. Может, и ей удастся чуть вздремнуть? Но нет — на потолке бимкнула синяя лампочка. Отдернув шторку, Таня оглядывает свой салон. Так и есть — это 34А, где проспавший полпланеты пассажир пропустил ужин, а над устьем Лены решил наконец подкрепиться. Таня нашаривает ноющими ступнями туфли и спешит на помощь.

– Здравствуйте, не хотите поужинать? У нас есть курица с овощами и рыба с макаронами.

– Спасибо, Танечка. Пожалуй, курицу, если можно.

Вежливый и внимательный: прочитал имя на бейджике. Таня уже жалеет, что ляпнула про курицу. Выпрямляется и видит на светлом фоне кухни силуэт Олеси. На всякий случай Таня прижимает ладони к груди и резко дважды поднимает и опускает локти, как будто изображает курочку Рябу на утреннике в детском саду. Безмолвный ответ столь же красноречив: силуэт беспомощно разводит ладони с растопыренными пальцами.

Татьяна делает скорбное лицо и извиняющимся тоном говорит, что, к ее огромному сожалению, курица закончилась. Осталась только рыба. Танины глаза полны искреннего сострадания и глубокой печали. Такой глубокой, что ясно: кур нет не только на борту, но и вообще нигде. Вымерли на всем белом свете одновременно и окончательно. По независящим от авиакомпании причинам. Пассажир 34А улыбается.

– Ну, закончилась и закончилась. Тащите что есть, голубушка.

Со вздохом облегчения Таня возвращается в кухню. Выдергивает из обшарпанной тележки подносик и сует в печку касалетку[1], содержимое которой можно опознать только по синей наклейке в форме рыбки, поскольку на вид и вкус содержимое с одинаковым успехом сойдет и за рыбу, и за курицу, и за печень мадагаскарской черепахи.

Хорошо, пассажир попался приличный. Некоторые такой скандал закатят — будьте-нате. Словно у нас ресторан пять звезд. Прошлый рейс та дамочка помните, что творила?! Всех измучила. Еще и жалобу накатала. А ты приносишь искренние извинения. Прям

[1] Касалетка – фольгированный контейнер для горячей еды.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

изо всех сил приносишь! Это ж какие актерские способности иметь надо... Тише, Танечка, не плачь. Ты просто устала.

Позже, сдавая самолет на стоянке, Таня записывает в специальном журнале, сколько и каких порций разошлось. Правда, она сомневается, что авиакомпания, которая тщательно собирает эти сведения, использует их с пользой. Если компания такая клиентоориентированная, что ж запасных порций так мало? Танины мысли направляются в более конструктивное русло. Обычно не хватает совсем немного порций. Чаще всего — одной-единственной. Как сегодня. Может быть, можно понять, сколько запасных порций курицы и рыбы нужно иметь, чтобы недовольных пассажиров не было? Ну, или чтоб были, но редко... И можно ли хоть как-то предсказать число недовольных?

Для авиакомпании, которая не только борется за рейтинг, но действительно уважает пассажиров и ценит своих бортпроводников, планирование бортового питания — серьезная математическая задача. Поможем славной уставшей девушке Тане и ее коллегам из наземных служб.

Мы сформулируем и решим даже не одну задачу, а несколько, пытаясь понять, как устроена случайная величина «число недовольных пассажиров».

Запас

Предположим, что в экономическом классе 300 пассажиров и что авиакомпания, изучая их предпочтения, обнаружила, что на этом конкретном рейсе пожелания разделяются поровну: пассажир с вероятностью 0,5 предпочитает курицу, а с вероятностью 0,5 — рыбу[2]. Поэтому на борт загрузили по 155 касалеток того и другого — по пять запасных порций каждого блюда.

Задача 1. Какова вероятность того, что не окажется недовольных пассажиров?

Договоримся называть недовольным всякого, кому не хватило желаемого блюда, независимо от того, станет он скандалить или улыбнется. Кроме того, будем считать, что на борту нет тех, кто вовсе отказывается от ужина, — это предположение недалеко от истины[3].

Решение. Задача сводится к схеме испытаний Бернулли. Каждый пассажир — отдельное испытание, испытания независимы. Успехом можно считать выбор курицы. Тогда задача сводится к вопросу о том, какова вероятность события «любителей курицы не больше 155 и любителей рыбы тоже не больше 155». Обозначим буквой S число «куролюбов», то есть число успехов в нашей серии испытаний. Тогда число «рыбоедов» равно $(300 - S)$. Получается система неравенств $S \le 155$ и $300 - S \le 155$, откуда

$$145 \le S \le 155.$$

Решение дается суровой формулой Бернулли:

$$\mathrm{P}(145 \le S \le 155) =$$

$$= C_{300}^{145} \cdot 0{,}5^{300} + C_{300}^{146} \cdot 0{,}5^{300} +$$

$$+ C_{300}^{147} \cdot 0{,}5^{300} + \ldots + C_{300}^{155} \cdot 0{,}5^{300}. \quad (1)$$

Число $0{,}5^{300}$ чудовищно мало, а множители C_{300}^{145}, C_{300}^{146}, ..., C_{300}^{155} чудовищно велики, и сказать, что вычисления по формуле (1) трудоемки, — ничего не сказать. Если бы лет 50 или даже 40 назад мы задались вопросом, сколько это будет, то у нас не было бы иного пути, как воспользоваться центральной предельной теоремой, которая утверждает, что сумма (1) довольно близка к плохо вычислимому интегралу широко известной функции[4]. Для этого интеграла составлены специальные таблицы, на что поколения математиков потратили сотни лет. В общем, не стали бы мы решать эту задачу несколько десятилетий назад в школьном методическом журнале.

Но сейчас у нас в руках компьютер. Чтобы вычислить сумму:

$$\mathrm{P}(S \le k) =$$

$$= C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 \cdot p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k},$$

в ячейке на листе электронной таблицы достаточно написать функцию БИНОМ.РАСП(k; n; p; 1).

Последний аргумент — единица — показывает, что нужно найти сумму всех слагаемых от нулевого до k-го, а не только одно k-е слагаемое, которое получится, если вместо числа 1 поставить 0.

В нашем случае $n = 300$ и $p = 0{,}5$. Это — параметры биномиального распределения, которому подчиняется случайная величина «число куролюбов». Преобразуем сумму в разность двух таких сумм:

$$\mathrm{P}(145 \le S \le 155) =$$
$$= \mathrm{P}(S \le 155) - \mathrm{P}(S < 145) =$$
$$= \mathrm{P}(S \le 155) - \mathrm{P}(S \le 144).$$

[2] Только для определенности. Можно рассмотреть любое другое соотношение. С точки зрения планирования запаса ситуация пятьдесят на пятьдесят — худший случай.

[3] Если отказывающиеся все же есть, то мы мысленно — только мысленно! — удалим их из самолета, считая, что соответствующим образом выросло число запасных порций.

[4] Функция нормального распределения $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ не является элементарной. Попросту — этот интеграл невозможно вычислить в обычном студенческом смысле слова.

Это преобразование дает возможность написать формулу в Excel (рис. 1):

БИНОМ.РАСП(155; 300; 0,5; 1) –
– БИНОМ.РАСП(144; 300; 0,5; 1).

D8 =БИНОМ.РАСП(C7;C4;C5;1)-БИНОМ.РАСП(C6-1;C4;C5;1)

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Задача стюардессы 1				
3						
4		n=	300			
5		p=	0,5			
6		k1=	145			
7		k2=	155			
8		P(k1<=S<=k2)=		0,474558		

Рис. 1

Как видим, при наличии только пяти запасных порций каждого блюда вероятность отсутствия недовольных равна 0,475, а вероятность их наличия, стало быть, равна 0,525, что много: недовольные будут встречаться чаще, чем в каждом втором полете по этому маршруту.

Как же поступить авиакомпании? Неужели придется брать двойной запас каждого блюда? Ведь это дорого. Кроме того, лишние порции занимают драгоценное место на борту, да и весят... Разумеется, чтобы недовольных не было наверняка (абсолютно и железно), придется взять по 150 запасных порций курицы и рыбы. И это действительно дорого.

А если не наверняка, то, может быть, можно обойтись меньшим числом? Ведь Таня не против извиняться перед пассажирами, только не нужно заставлять ее делать это слишком часто. Скажем, не чаще, чем в каждом двадцатом полете. Значит, нам нужно добиться того, чтобы событие «есть недовольные пассажиры» имело вероятность не больше, чем 0,05.

Задача 2. Сколько запасных порций нужно взять, чтобы недовольных не было с вероятностью 0,95 или больше?

Решение. Пусть число запасных порций курицы равно m и таково же число запасных порций рыбы. Нужно найти наименьшее целое решение неравенства

$$\mathrm{P}(150 - m \le S \le 150 + m) \ge 0{,}95,$$

то есть

$$\mathrm{P}(S \le 150 + m) - \mathrm{P}(S \le 149 - m) \ge 0{,}95. \quad (2)$$

В электронную таблицу придется внести небольшие изменения. Для начала положим $m = 5$. Это удобно, поскольку в этом случае нам уже известна вероятность и можно себя проверить (рис. 2).

C7 =C4*C5-C6

	A	B	C	D
1				
2		Задача стюардессы 2		
3				
4		n=	300	
5		p=	0,5	
6		m=	5	
7		k1=np-m	145	
8		k2=np+m	155	
9		P(k1<=S<=k2)=		0,474558

Рис. 2

Вероятность 0,475 мала. Будем увеличивать число m до момента, когда число в ячейке D9 достигнет 0,95.

На рисунке 3 показан подбор. Наименьшее подходящее m равно 17, что гораздо меньше, чем 150. Оказалось, что нужное число запасных порций не так велико, как могло показаться вначале.

Решение можно незначительно упростить, если сообразить, что неравенство

$$\mathrm{P}(150 - m \le S \le 150 + m) \ge 0{,}95$$

эквивалентно неравенству

$$\mathrm{P}(S \le 149 - m \text{ или } S \ge 151 + m) \le 0{,}05,$$

связанному с противоположным событием, и — в силу симметрии — неравенству

$$\mathrm{P}(S \le 149 - m) \le 0{,}025. \quad (3)$$

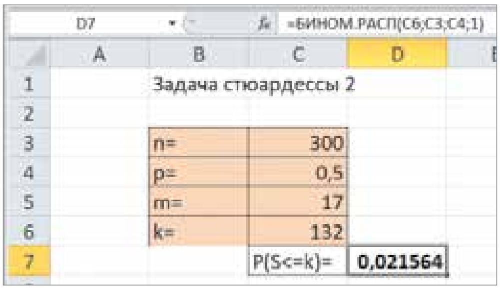
n=	300	
p=	0,5	
m=	9	
k1=np-m	141	
k2=np+m	159	
P(k1<=S<=k2)=		0,72737

n=	300	
p=	0,5	
m=	16	
k1=np-m	134	
k2=np+m	166	
P(k1<=S<=k2)=		0,943434

n=	300	
p=	0,5	
m=	17	
k1=np-m	133	
k2=np+m	167	
P(k1<=S<=k2)=		0,956872

Рис. 3

На рисунке 4 показано решение задачи 2 с помощью формулы (3):

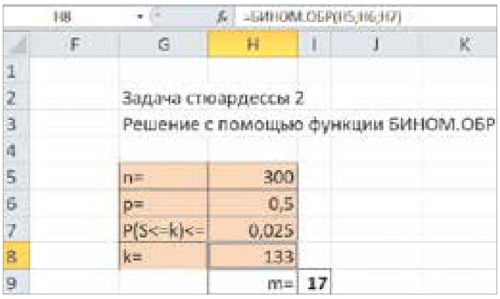


D7 =БИНОМ.РАСП(C6;C3;C4;1)

	A	B	C	D
1		Задача стюардессы 2		
2				
3		n=	300	
4		p=	0,5	
5		m=	17	
6		k=	132	
7			P(S<=k)=	0,021564

Рис. 4

Снова подбор, который не займет много времени даже при обобщении задачи на очень большие числа. Однако разработчики MS Excel предусмотрели специальную функцию, которая сразу ищет наименьшее целое решение k неравенства $P(S \le k) \le \alpha$, то есть как раз неравенства (3). Это функция БИНОМ.ОБР(α; n; p). Решение задачи 2 по формуле (3) с помощью функции БИНОМ.ОБР (в ячейке H8) представлено на рисунке 5:



H8 =БИНОМ.ОБР(H5;H6;H7)

	F	G	H	I
1				
2		Задача стюардессы 2		
3		Решение с помощью функции БИНОМ.ОБР		
4				
5		n=	300	
6		p=	0,5	
7		P(S<=k)<=	0,025	
8		k=	133	
9			m=	17

Рис. 5

Остается заметить, что в электронных таблицах нет экзотических или редко используемых функций. Придется сделать вывод, что подобные задачи приходится решать настолько часто, что функции БИНОМ.РАСП и БИНОМ.ОБР вошли в список стандартных функций Excel.

Наиболее вероятное число недовольных

Сдавая самолет после рейса, Таня мысленно отметила, что очень часто не хватает всего лишь одной порции. Помните? Это действительно так или здесь Танино наблюдение субъективно?

Задача 3. Каково наиболее вероятное число недовольных пассажиров?

Решим эту задачу в предположении, что запасных порций нет, а потом посмотрим, что получится, если они есть.

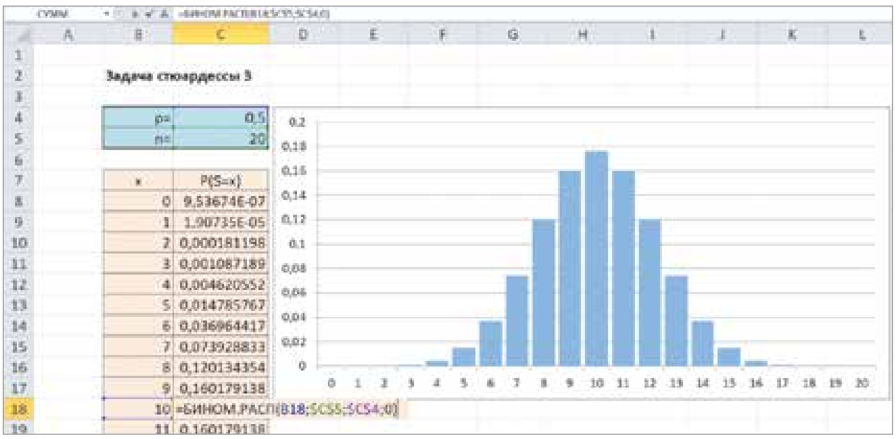
Случайная величина «число куролюбов», как мы заметили, подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n = 300$ и $p = 0{,}5$. Впрочем, как мы увидим, конкретные числа не играют роли, хотя удобно считать, что число пассажиров n четно.

Биномиальное распределение, конечно, можно изучать алгебраически, но нам не нужны точные вычисления: достаточно сравнить вероятности событий «недовольных нет», «один недовольный пассажир», «два недовольных» и т.п. Поскольку запасных порций, по предположению нет, а курицы и рыбы поровну, по $\frac{n}{2}$ порций, случайная величина Y «число недовольных пассажиров» связана с числом куролюбов S равенством

$$Y = \left| S - \frac{n}{2} \right|.$$

Напомним, что мы полагаем, будто все, кто не куролюбы, те — рыбоеды. Изобразим на двух диаграммах распределения этих случайных величин. Сначала построим диаграмму распределения случайной величины S (рис. 6).

Мы построили диаграмму для $n = 20$ в надежде, что читатель понимает, что при $n = 300$ она будет выглядеть точно так же, только столбики станут очень тонкими или просто не уместятся на странице.



	A	B	C
1			
2		Задача стюардессы 3	
3			
4		p=	0,5
5		n=	20
6			
7		x	P(S=x)
8		0	9,53674E-07
9		1	1,90735E-05
10		2	0,000181198
11		3	0,001087189
12		4	0,004620552
13		5	0,014785767
14		6	0,036964417
15		7	0,073928833
16		8	0,120134354
17		9	0,160179138
18		10	=БИНОМ.РАСП(B18;C5;C4;0)
19		11	0,160179138

Рис. 6

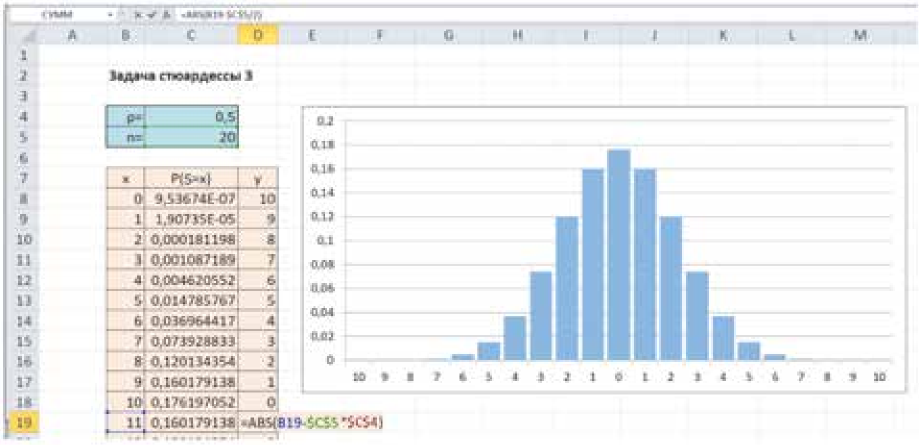


Рис. 7

Теперь преобразуем эту диаграмму в диаграмму распределения случайной величины Y «число недовольных пассажиров». Не будем пока менять столбики, поскольку вероятности те же. Мы изменим лишь подписи на горизонтальной оси. Недовольных нет, то есть $Y = 0$, только если $S = 10$. На борту один недовольный, то есть $Y = 1$, только если $S = 11$ (недовольный куролюб) или $S = 9$ (недовольный рыбоед), и так далее. В столбце D мы добавим значения случайной величины Y и изменим подписи (рис. 7).

Разумеется, построенную диаграмму трудно назвать наилучшей возможной, канонической или просто наглядной: в ней все значения, кроме 0, встречаются дважды. Ее нужно перестроить, «склеив» одинаковые значения. Промежуточный шаг нам понадобился, чтобы избежать длинных разговоров на тему, откуда берется число недовольных и его вероятность.

Теперь склеим одинаковые значения. Значение 0 встречается один раз. Соответствующий столбик — без изменений. Значение 1 встречается дважды. Два одинаковых синих столбика «1» на левой диаграмме сольются в один столбик «1» на правой диаграмме (рис. 8). И так далее.

Видно, что столбик 1 выше всех прочих. Значит, наиболее вероятно, что на борту окажется ровно один недовольный пассажир. Алгебраически эту мысль можно выразить цепочкой неравенств:

$$C_{2m}^{m} < 2C_{2m}^{m+1} > 2C_{2m}^{m+2} > \ldots > 2C_{2m}^{2m} \tag{4}$$

при $2m = n > 2$.

Попробуйте мысленно или с помощью приложенного файла MS Excel поменять условия: число пассажиров и вероятности предпочтений (соответственно, нужно брать пропорциональное этим вероятностям число порций курицы и рыбы). Вы увидите, что эффект устойчивый: наиболее вероятное число недовольных — один при разумных сочетаниях n и p.

Если на борту есть запасные порции, хотя бы по одной, то картина меняется. Вероятнее всего, недовольных не будет. Но если они все же есть, то все равно событие «ровно один недовольный» более вероятно, чем событие «ровно два», и так далее. Таня наблюдательная девушка. На рисунке 9 диаграмма распределения числа недовольных пассажиров при одной запасной порции каждого блюда при $n = 20$ и $p = 0{,}5$:

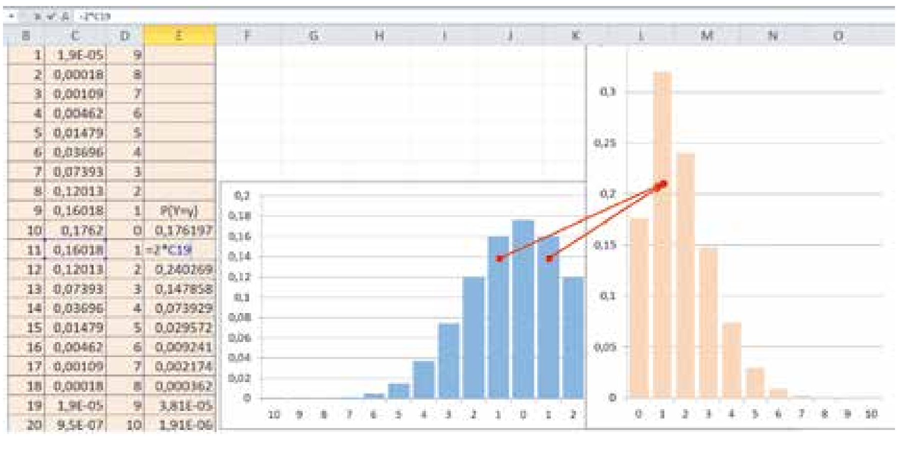


Рис. 8

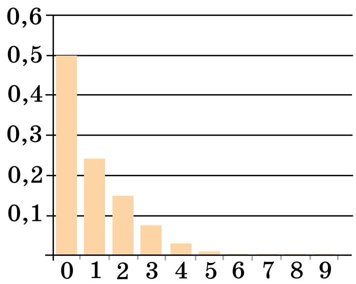


Рис. 9

Среднее число недовольных

Мы уже несколько раз хвастались вероятностным чутьем и способностью оценивать среднее без расчетов. Действительно, наш опыт и здравый смысл позволяют легко понять, что среднее число любителей курицы на борту 150, если пассажиров 300, а курицу в среднем предпочитает половина. Особенно хорошо интуиция работает тогда, когда среднее значение является наиболее вероятным или отстоит от него недалеко.

Однако встречаются случаи, когда вероятностное чутье подводит. Например, было бы весьма трудно из интуитивных соображений сообразить, что n автомобилей на узком шоссе образуют в среднем примерно $\ln n$ вереница (см. статью «Задача об узком шоссе», № 2, 2023).

Что же с недовольными пассажирами? Мы знаем, что если запасных порций нет, то чаще всего недовольным окажется ровно один пассажир. Это более вероятно, чем двое недовольных, и более вероятно, чем их отсутствие. Возникает подозрение, что математическое ожидание случайной величины Y «число недовольных пассажиров» если не равно единице, то близко к ней, то есть событие «один недовольный пассажир» может служить ориентиром при планировании. К сожалению, это не так: среднее число недовольных растет с увеличением числа пассажиров на борту. Растет небыстро, но все же существенно отличается от константы.

Задача 4. Найти математическое ожидание числа недовольных пассажиров, если вероятности предпочтения обоих блюд одинаковы, на борту четное число пассажиров $n = 2m$ и авиакомпания загрузила на борт ровно m порций одного блюда и столько же — другого.

Решение. Вместо математического ожидания случайной величины Y «число недовольных» вычислим математическое ожидание величины $(m + Y)$. Требуется найти сумму:

$$\mathrm{E}(m+Y)=m\cdot C_{2m}^{m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}+(m+1)\cdot 2C_{2m}^{m+1}\cdot\frac{1}{2^{2m}}+$$

$$+(m+2)\cdot 2C_{2m}^{m+2}\cdot\frac{1}{2^{2m}}+\ldots$$

$$\ldots+(m+k)\cdot 2C_{2m}^{m+k}\cdot\frac{1}{2^{2m}}+\ldots+2m\cdot 2C_{2m}^{2m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}=$$

$$=m\cdot C_{2m}^{m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{2^{2m-1}}\times$$

$$\times\left\{(m+1)C_{2m}^{m+1}+(m+2)C_{2m}^{m+2}+\right.$$

$$\left.+\ldots+(m+k)C_{2m}^{m+k}+\ldots+2mC_{2m}^{2m}\right\}.$$

Отдельно найдем значение выражения в фигурных скобках:

$$(m+1)C_{2m}^{m+1}+(m+2)C_{2m}^{m+2}+\ldots$$

$$\ldots+(m+k)C_{2m}^{m+k}+\ldots+2mC_{2m}^{2m}=$$

$$=\frac{(2m)!}{(m-1)!m!}+\frac{(2m)!}{(m-2)(m+1)!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(2m)!}{(m-k)(m+k-1)!}+\ldots+\frac{(2m)!}{0!(2m-1)!}=$$

(вынесем $2m$ за скобки)

$$=2m\left(\frac{(2m-1)!}{(m-1)!m!}+\frac{(2m-1)!}{(m-2)(m+1)!}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(2m-1)!}{(m-k)(m+k-1)!}+\ldots+\frac{(2m-1)!}{0!(2m-1)!}\right)=$$

$$=2m\left(C_{2m-1}^{m-1}+C_{2m-1}^{m-2}+\ldots+C_{2m-1}^{m-k}+\ldots+C_{2m-1}^{0}\right).$$

В скобках оказалась сумма чисел от C_{2m-1}^{0} до C_{2m-1}^{m-1}. Это числа первой половины $(2m-1)$-й строки треугольника Паскаля. Вторая половина состоит из чисел от C_{2m-1}^{m} до C_{2m-1}^{2m-1}, причем числа первой половины строки совпадают с числами второй половины в обратном порядке. Сумма всех чисел в $(2m-1)$-й строке равна 2^{2m-1}, поэтому

$$C_{2m-1}^{m-1}+C_{2m-1}^{m-2}+\ldots+C_{2m-1}^{m-k}+\ldots+C_{2m-1}^{0}=2^{2m-2}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{E}(m+Y)=m\cdot C_{2m}^{m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot 2m\cdot 2^{2m-2}=\frac{m}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+m.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}Y=\mathrm{E}(m+Y)-m=\frac{m}{2^{2m}}C_{2m}^{m}=\frac{(2m)!}{2\cdot 2^{m-1}(m-1)!\cdot 2^{m}\cdot m!}=$$

$$=\frac{(2m)!}{2(2m-2)!!\cdot(2m)!!}=\frac{n!}{2(n-2)!!\cdot n!!}=\frac{(n-1)!!}{2(n-2)!!}.$$

Запись $n!!$ означает двойной факториал, равный произведению всех натуральных чисел на отрезке от 1 до n, имеющих ту же четность, что и число n. Например,

$$3!!=1\cdot 3,\quad 4!!=2\cdot 4.$$

Получились короткие равенства:

$$\mathrm{E}Y=\frac{nC_{n}^{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}}=\frac{(n-1)!!}{2(n-2)!!}. \qquad (5)$$

С учетом двойки в знаменателе, множителей над и под дробной чертой поровну. Например, если пассажиров $n = 300$, то среднее число недовольных пассажиров равно

$$\mathrm{E}Y=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 299}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 298}.$$

Не составит труда подсчитать, сколько это будет. Можно использовать стандартную функцию

ДВФАКТР (да-да, в электронных таблицах есть и такая!) (рис. 10, слева):

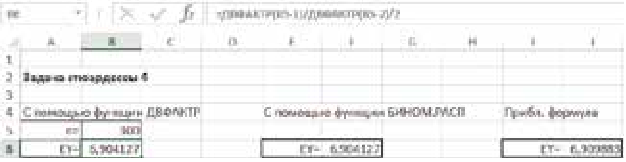


Рис. 10

Но это плохой стиль, поскольку числитель и знаменатель огромны, а вычислительные возможности компьютера небезграничны. Убедитесь, что если число пассажиров больше, чем 301, то электронная таблица уже не выдерживает. Лучше найти произведение

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{n-1}{n-2}.$$

Сделать это в MS Excel или даже на калькуляторе чрезвычайно просто.

Другой способ подсчета — воспользоваться первым из равенств (5) и заметить, что выражение $\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n}$ равно вероятности получить поровну орлов и решек, бросая монету n раз (мы помним, что n четно). Поэтому вычисление сводится к применению функции БИНОМ.РАСП$\left(\frac{n}{2}; n; 0{,}5; 0\right)\cdot\frac{n}{2}$ (рис. 10 в центре).

Альтернативный вывод равенств (5)

Формулы (5) мы получили, что называется, в лоб, с помощью естественных, но утомительных комбинаторных преобразований. Пожалуй, только идея искать $\mathrm{E}(m + Y)$ вместо $\mathrm{E}Y$ была неочевидной.

Но (5) можно получить и из других, более вероятностных соображений. С каждым пассажиром свяжем индикатор I_k, который равен 1, если пассажир недоволен, и 0, если доволен ($1 \le k \le n = 2m$). Тогда нужно:

– показать, что все индикаторы имеют одинаковые математические ожидания:

$$\mathrm{E}I_k = \mathrm{P}(I_k = 1) = \sum_{j=m}^{2m-1}\frac{C_{2m-1}^{j}}{2^{2m-1}}\left(1-\frac{m}{j+1}\right), \tag{6}$$

– упростить это выражение до

$$EI_k = C_{2m}^{m}\frac{1}{2^{2m+1}},$$

– перейти в равенстве

$$Y = I_1 + I_2 + \ldots + I_{2m}$$

к математическим ожиданиям.

Приближенное равенство для E*Y*

Выражение в правой части (5) чем-то сродни расшифрованному иероглифу из неизвестной письменности. Оно лаконичное, как рыцарский герб, короткое, как выстрел, но все равно немного загадочное. Хочется большей ясности. Пусть равенство будет приближенным и даже не таким изящным, но зато предсказуемым, удобочитаемым и удобосчитаемым, если можно так выразиться. Воспользуемся первым из равенств (5):

$$\mathrm{E}Y = \frac{m}{2^{2m}}C_{2m}^{m} = \frac{(2m)!}{m!m!}\cdot\frac{m}{2^{2m}}$$

и преобразуем все три факториала с помощью формулы Стирлинга[5]

$$m! \approx \sqrt{2\pi m}\cdot m^m e^{-m}:$$

$$\mathrm{E}Y \approx \frac{\sqrt{4\pi m}(2m)^{2m}e^{-2m}}{2\pi m\cdot m^{2m}e^{-2m}}\cdot\frac{m}{2^{2m}} = \frac{m}{\sqrt{\pi m}} = \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt{\pi\cdot\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}. \tag{7}$$

Таким образом, при отсутствии запасных порций среднее число недовольных пассажиров растет пропорционально квадратному корню из числа пассажиров. Коэффициент пропорциональности равен $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

При $n = 300$ точное равенство (5) дает нам $\mathrm{E}Y = 6{,}904\ldots$, а приближенная формула (7) дает $6{,}909\ldots$ (см. рис. 10, справа), что, согласитесь, в любом практическом смысле не отличается от $6{,}904$, но вычисляется гораздо проще.

Задачи для самостоятельного решения

1. На рейсе 200 пассажиров, предпочтения которых в среднем поровну разделяются между бараниной с картофелем и индейкой с овощами. На борту по 103 порции каждого блюда. Найдите вероятность того, что не будет недовольных пассажиров.

2. Сколько нужно загрузить запасных порций каждого блюда (сверх 100), чтобы в условиях задачи 1 недовольных не было с вероятностью 0,9 или больше?

3. Ожидается, что предпочтения разделяются не поровну: пассажир предпочитает баранину с вероятностью 0,4, а индейку с вероятностью 0,6. Компания заготовила 80 порций баранины и 120 порций индейки. Сколько нужно сверх этого запасных порций каждого блюда, чтобы недовольных не было с вероятностью 0,9 или больше?

4. Докажите цепочку неравенств (4).

5. Выведите формулу или аналогичную ей для случая, когда пассажиров нечетное число $n = 2m - 1$, а на борту по m порций каждого из двух блюд.

6.* Докажите равенство (6) и упростите его: $\mathrm{E}I_k = C_{2m}^{m}\frac{1}{2^{2m+1}}$.

Ответы к задачам из статьи «Задача о театралах»

1. 95. **2.** От 64 до 141. **3.** 16,402 (точная формула с округлением). **4.** $\frac{m-1}{2}$. **5.** $\frac{m^2-1}{12}$.

[5] Wikipedia.org/wiki/Формула_Стирлинга.