И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Задача 8

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

Задача о театралах

Как-то так получилось, что задачи в нашем цикле идут не по возрастанию сложности, а в каком-то весьма непонятном порядке. Но это даже неплохо. Сегодня мы продолжим разговор о случайных перестановках, а позже вернемся к ним еще разок-другой. И как раз сегодняшние задачи субъективно намного проще двух предыдущих*.

Все мы любим театр, который начинается с вешалки и продолжается буфетом. Но есть еще одно обязательное и священное действо перед началом спектакля — рассадка зрителей. Проходы между рядами узкие, а войти можно только с одной стороны, потому что с другой стороны прохода нет — кресла партера упираются в ложи. Особенно в старых театрах — светочах культуры. Вот именно о такой ситуации идет речь.

Кресла в ряду пронумерованы. Кресло № 1 стоит вплотную к ложе, а из центрального широкого прохода на свои места пробираются зрители. Проблема в том, что они не договорились между собой заранее, в каком порядке им лучше идти, и поэтому те, кто уже занял место, вынуждены пропускать тех, кому нужно дальше. Это непременно сопровождается вежливыми репликами: «Будьте любезны...», «Прошу Вас, голубушка...» «Мужчина! Ну куды ж вы лэзете?», «Ой, коленка, моя коленка!..», и тому подобными высококультурными репликами. Сидящий должен встать, чтобы пропустить идущего, при этом обтянутое велюром сиденье с громким хлопком поднимается, роняя на пол сумочки, программки и бинокли. Знакомо?

Предположим, что кресел в ряду ровно n (от кресла № 1 у ложи до кресла № n у прохода) и что зрители появляются и занимают свои места в случайном порядке. Строго говоря, это не совсем так, поскольку в реальности некоторые приходят парами, а иногда появляются целыми компаниями. Будем считать, что у нас самая плохая ситуация, — все зрители приходят в случайном порядке поодиночке и независимо друг от друга.

Задача 1. Сколько всего раз придется встать тем, кто сидит, чтобы пропустить идущих? То есть сколько раз хлопнут кресла в этом ряду?

Задача 2. Сколько раз придется встать случайно выбранному зрителю с билетом на место № m?

Разумеется, речь идет о характеристиках этих случайных величин — математическом ожидании и стандартном отклонении.

Можно было бы начать с задачи 2, подсчитав, сколько раз подскочит каждый отдельный зритель, а потом сложить результаты и получить тем самым решение задачи 1. Но мы пойдем другим путем: решим задачу 1, а задачу 2 предложим для самостоятельного решения. Нужно будет просто повторить выкладки, которые станут только проще: задача 2 является частью задачи 1.

* О том, что такое объективная сложность задачи, мы говорить не будем, ибо это нас уведет в совершенные дебри.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Разумеется, вы уже догадались, что речь идет о случайной перестановке: зрителю, у которого в билете место k (будем называть его зрителем k), ставится в соответствие его место в очереди тех, кто занимает места.

Например, при $n = 8$ может случиться такая перестановка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 7 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Это означает, что зритель с местом 1 пришел четвертым, зритель с билетом на место 2 пришел шестым, а первым пришел зритель на место 4. Но место 1 находится дальше от прохода, чем место 4, поэтому тот, кто сидит на месте 4, должен будет встать, чтобы пропустить зрителей на места 1, 2 и 3, потому что они пришли позже. Зритель с местом 1 — счастливчик. Он точно будет спокойно сидеть, заняв свое место, за ним мест уже нет.

Кстати, нам пора перейти от двустрочной записи перестановок к *однострочной*: очевидно, первую строку можно не писать, поскольку с ней все и так ясно. Теперь перестановка запишется короче:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 1 & 7 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Двустрочную запись будем использовать в редких случаях, когда это нам необходимо, например, если мы зачем-то хотим поменять порядок чисел в верхней строке тоже.

Математическое ожидание и дисперсия числа вставаний

Решение задачи 1

Рассмотрим двух зрителей с местами j и k ($j < k$) и посмотрим, когда они пришли. Оказывается, их номера в очереди a_j и a_k. Зададимся вопросом, придется ли одному из них вставать, чтобы пропустить другого (не кого-то вообще, а другого именно из этой пары). Ясно, что зрителю j вставать не придется, его место дальше от прохода. Зрителю k придется встать, чтобы пропустить зрителя j, только если зритель j пришел позже, то есть если $a_j > a_k$.

Таким образом, каждое вставание есть результат *беспорядка* в случившейся перестановке.

Определение. Беспорядком в перестановке $(a_1 \dots a_n)$ называется пара $(a_j\ a_k)$, где $j < k$ и $a_j > a_k$. Элементы a_j и a_k расположены в перестановке необязательно подряд.

Например, в перестановке (2) имеется 12 беспорядков:

(4 2), (4 1), (4 3), (6 2), (6 1), (6 3), (6 5),
(2 1), (7 3), (7 5), (8 3) и (8 5).

Это значит, что если зрители придут на свои 8 мест в порядке перестановки (2), то всего случится 12 вставаний.

Теперь можно применить стандартный прием. Для каждой пары зрителей (j, k), где $j < k$, введем индикатор $I_{j,k}$ беспорядка, то есть события $A_k = \{a_j > a_k\}$.

Общее число вставаний, то есть беспорядков X, равно сумме всех индикаторов:

$$X = I_{1,2} + I_{1,3} + \dots + I_{j,k} + \dots + I_{n-1,n}. \qquad (3)$$

Нужно найти математические ожидания индикаторов. Ясно, что элементы a_j и a_k могут образовывать беспорядок ($a_j > a_k$), а могут не образовывать ($a_j < a_k$), причем, поскольку мы абстрагируемся от прочих элементов, оба эти события равновероятны, а вероятность каждого равна $\frac{1}{2}$. Следовательно, для любой пары (j, k) индикатор $I_{j,k}$ имеет распределение

$$I_{j,k} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

его математическое ожидание равно

$$\mathrm{E}I_{j,k} = \frac{1}{2}.$$

При этом общее число индикаторов равно общему числу возможных пар зрителей, то есть

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}X = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Задача со средним числом вставаний оказалась несложной. Разберемся с дисперсией и стандартным отклонением. Очевидно, индикаторы зависимы. Было бы славно, если бы они были независимы. Мы нашли бы дисперсию $\mathrm{D}X$, просто сложив дисперсии всех индикаторов. Но они зависимы. Действительно, пусть, например, зрители 1 и 3 образуют беспорядок: $a_1 > a_3$. Это значит, что с большой вероятностью третий зритель пришел довольно рано. Но тогда, скорее всего, он пришел раньше второго, и беспорядок $a_2 > a_3$ скорее имеется, чем отсутствует. В общем, влияние беспорядков друг на друга, кажется, есть. Поэтому пойдем долгим стандартным путем:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X.$$

Ожидание $\mathrm{E}X$ найдено, так что вопрос сводится к поиску $\mathrm{E}X^2$. Возведем в квадрат равенство (3):

$$X^2 = I_{1,2}^2 + I_{1,3}^2 + \dots + I_{j,k}^2 + \dots + I_{n-1,n}^2 +$$
$$+ \left(I_{1,2} \cdot I_{1,3} + \dots + I_{j,k} \cdot I_{l,m} + \dots + I_{n-2,n} \cdot I_{n-1,n}\right). \qquad (4)$$

Квадрат индикатора равен самому индикатору:

$$I_{j,k}^2 = I_{j,k},$$

поскольку индикатор принимает только значения 0 или 1. Поэтому с суммой квадратов проблем нет. Проблема в скобках, где стоит сумма всех возможных попарных произведений различных индикаторов $I_{j,\,k}\cdot I_{l,\,m}$, где $j<k$ и $l<m$. Каждое такое произведение мы учитываем отдельно два раза. Например, есть слагаемые $I_{1,\,2}\cdot I_{3,\,4}$ и $I_{3,\,4}\cdot I_{1,\,2}$. Поэтому перед скобкой нет множителя 2.

Рассмотрим произведение $I_{j,\,k}\cdot I_{l,\,m}$. Оно равно единице, только если случилось событие «зритель k пришел раньше зрителя j, а зритель m — раньше зрителя l», то есть $I_{j,\,k}\cdot I_{l,\,m}$ — индикатор события, в котором наблюдается одновременно два беспорядка: $a_j>a_k$ и $a_l>a_m$. Возникает несколько случаев.

1. Сначала рассмотрим случай $I_{j,\,k}\cdot I_{j,\,m}$, когда в произведении совпадают первые индексы, как, например, в произведении $I_{1,\,2}\cdot I_{1,\,3}$. Нужно выяснить, сколько таких произведений и каково математическое ожидание каждого.

Чтобы перечислить такие произведения, достаточно выбрать тройку j,k,m. Таких троек C_n^3. Но в этой тройке $j<k$ и $j<m$, а k и m могут располагаться в разном порядке, поэтому из одной тройки мы получаем два произведения:

$$I_{j,\,k}\cdot I_{j,\,m} \text{ и } I_{j,\,m}\cdot I_{j,\,k}.$$

Значит, всего таких произведений в сумме (4) ровно $2C_n^3$. Чтобы эти произведения равнялись единице, нужно, чтобы обе пары $(a_j\ a_k)$ и $(a_j\ a_m)$ были беспорядками, то есть чтобы число a_j было больше, чем a_k и чем a_m. Вероятность этого $\dfrac{1}{3}$:

$$\mathrm{E}\left(I_{j,k}\cdot I_{j,m}\right)=\mathrm{E}\left(I_{j,m}\cdot I_{j,k}\right)=\mathrm{P}\left(a_k<a_j>a_m\right)=\frac{1}{3}.$$

2. Второй случай, когда в произведении $I_{j,\,k}\cdot I_{l,\,m}$ совпадают вторые индексы ($m=k$), симметричен первому. Таких произведений тоже $2C_n^3$, и в каждом таком случае

$$\mathrm{E}\left(I_{j,k}\cdot I_{l,k}\right)=\mathrm{E}\left(I_{l,k}\cdot I_{j,k}\right)=\mathrm{P}\left(a_l>a_k<a_j\right)=\frac{1}{3}.$$

3. В третьем случае пусть в произведении $I_{j,\,k}\cdot I_{l,\,m}$ совпадают индексы k и l. Таких комбинаций ровно столько, сколько троек, то есть C_n^3. При этом

$$\mathrm{E}\left(I_{j,k}\cdot I_{k,m}\right)=\mathrm{P}\left(a_j>a_k>a_m\right)=\frac{1}{6}.$$

4. Четвертый случай, $j=m$, симметричен третьему: произведений вида $I_{j,\,k}\cdot I_{l,\,j}$ тоже C_n^3, а

$$\mathrm{E}\left(I_{j,k}\cdot I_{l,j}\right)=\mathrm{P}\left(a_l>a_j>a_k\right)=\frac{1}{6}.$$

5. Остался случай, когда совпадений в четверке индексов j, k, l и m нет. Тогда имеется независимость: события $a_j>a_k$ и $a_l>a_m$ независимы, и каждое имеет вероятность $\dfrac{1}{2}$. Поэтому оба беспорядка вместе случаются с вероятностью $\dfrac{1}{4}$.

Таких комбинаций столько, сколько можно составить упорядоченных пар (j,k) и (l,m) из пар индексов, в которых никакие индексы не повторяются, то есть $C_n^2C_{n-2}^2$.

Теперь перейдем в к математическим ожиданиям и подставим в полученное равенство с таким трудом добытые сведения:

$$\mathrm{E}X^2=$$

$$=\mathrm{E}(I_{1,\,2}+I_{1,\,3}+\ldots+I_{j,\,k}+\ldots+I_{n-1,\,n})+(\mathrm{E}(I_{1,\,2}\cdot I_{1,\,3})+$$
$$+\ldots+\mathrm{E}(I_{j,\,k}\cdot I_{l,\,m})+\ldots+\mathrm{E}(I_{n-2,\,n}\cdot I_{n-1,\,n}))=$$

$$=\mathrm{E}X+\underbrace{2C_n^3\cdot\frac{1}{3}+2C_n^3\cdot\frac{1}{3}}_{\text{Случаи 1 и 2}}+\underbrace{C_n^3\cdot\frac{1}{6}+C_n^3\cdot\frac{1}{6}}_{\text{Случаи 3 и 4}}+\underbrace{C_n^2C_{n-2}^2\cdot\frac{1}{4}}_{\text{Случай 5}}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{4}+\frac{5n(n-1)(n-2)}{18}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{16}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{36+40(n-2)+9\left(n^2-5n+6\right)}{72}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{9n^2-5n+10}{72}.$$

Тогда

$$\mathrm{D}X=\frac{n(n-1)\left(9n^2-5n+10\right)}{144}-\frac{n^2(n-1)^2}{16}=\frac{n(n-1)(2n+5)}{72}.$$

Результаты замечательные в том смысле, что и для ожидания, и для дисперсии мы получили явные формулы без всяких рекурсий и асимптотических приближений. По этим формулам можно просто считать.

Предположим, что от центрального прохода до конца ровно 30 кресел, и поставим вопросы.

1. Сколько в среднем раз зрителям этого ряда придется пропускать друг друга?

2. Какова интервальная оценка этой величины, если воспользоваться решающим правилом «плюс-минус три стандартных отклонения»?

Решение проводим в электронной таблице (рис. 1).

	B	C	D
1	Задача о театралах		
2			
3		n=	30
4		EX=	217,5
5		DX=	785,417
6		Ст.откл.=	28,025
7			
8		Реш.правило (ст.откл).	
9		k=	3
10			
11		Доверит.интервал	
12		Лев.гр.	Прав.гр.
13		133,4241	301,575859
14			

Рис. 1

Число счастливчиков, которым не надо вставать

Еще одна задача, которая во всех смыслах сложнее первых двух, — о числе зрителей, которым не придется никого пропускать после того, как они заняли свое место. Эта задача действительно непроста, но решать мы ее будем лишь до тех пор, пока не поймем, что уже знаем решение и ответ.

Задача 3. Сколько среди зрителей в этом ряду окажется *счастливчиков*, то есть тех, кому не придется вставать ни разу?

Решение. Найдем математическое ожидание и стандартное отклонение их количества. Ясно, что первому вставать не придется — у него билет на место 1, и дальше идти некуда. Зрителю 2 не придется вставать, только если он пришел позже зрителя 1, то есть если $a_2 > a_1$. Зрителю 3 не нужно будет вскакивать, если $a_3 > a_2$ и $a_3 > a_1$, то есть если он пришел позже и первого, и второго. И так далее: зрителю k не придется вставать, только если a_k больше, чем все предыдущие элементы перестановки от a_1 до a_{k-1}.

Собственно, все... Мы свели задачу к уже решенной задаче об узком шоссе (Математика, 2023, № 2). Только там были вереницы автомобилей и лидеры вереницы, чья скорость меньше, чем у всех предыдущих, то есть элемент перестановки меньше всех предшествующих. Здесь, наоборот, счастливчиками являются те элементы перестановки (зрители), которые больше всех предшествующих (пришли позже). Но это, согласитесь, одно и то же: достаточно каждый элемент перестановки a заменить элементом $(n - a)$ и становится ясно, что одно преобразуется в другое.

Значит, мы сразу можем написать результаты. Пусть X — число счастливчиков. Точные формулы*:

$$\mathrm{E}X = H_n \text{ и } \mathrm{D}X = H_n - H_{2,n}. \qquad (5)$$

Приближенные асимптотические равенства:

$$\mathrm{E}X \approx \ln n + \gamma = \ln n + 0{,}577\ldots,$$

$$\mathrm{D}X \approx \ln n + \gamma - \frac{\pi^2}{6} = \ln n - 1{,}068\ldots \qquad (6)$$

Напомним еще, что число γ называется *константой Эйлера–Маскерони*.

В заключение добавим, что театральный сюжет этой задачи не такой уж и интересный. В конце концов, зрители в театре — наименьшее из зол, и начало спектакля задерживается, как правило, не из-за них. Но похожие задачи возникают в гораздо более ответственных мероприятиях. Например, похожая схема образуется при посадке в самолет. Пробки, возникающие в салоне при посадке, весьма досадны, поскольку авиакомпания оплачивает каждую минуту простоя самолета у телетрапа. В этой связи было сломано немало копий и построено немало вероятностных моделей.

Одна из британских авиакомпаний решила упорядочить посадку пассажиров, сперва запуская тех, кто сидит у окна, затем тех, у кого кресло посередине, и последними — обладателей мест у проходов. Действительно, самолет заполнялся быстро, но зато возникла сумасшедшая неразбериха и давка перед посадочными воротами. Надежды на то, что через пару месяцев пассажиры привыкнут, разберутся в шести буквах, от A до F, маркирующих положение кресла, и будут послушно выполнять просьбы контролеров, не оправдались.

«Thai Airways», «Победа» и многие другие компании пошли другим путем: сперва приглашаются пассажиры с местами в кормовой части салона, а затем те, кто сидит ближе к носу. Вероятно, эта практика себя оправдывает: две категории все же не шесть.

Задачи для самостоятельного решения

1. В театральном ряду 20 кресел, проход к ним с одной стороны и все билеты проданы. Зрители занимают свои места в случайном порядке по одному. Сколько в среднем будет вставаний?

2. В условиях предыдущей задачи найдите интервал вероятных значений случайной величины «общее число вставаний», используя правило двух стандартных отклонений.

3. В условиях первой задачи найдите число зрителей, которым придется встать хотя бы раз.

4. Решите задачу 2 из статьи: сколько раз в среднем придется встать зрителю, у которого билет на место m?

5*. Найдите дисперсию числа вставаний зрителя из задачи 4. Эта задача сложнее предыдущей, но вы справитесь, если разобрались с решением задачи 1.

Ответы к задачам из статьи «Задача об узком шоссе»

1. а) $\mathrm{E}X = 4{,}992$ ($\approx 4{,}489$ по приближенной формуле); б) от 1 до 9. **2.** а) 3 и 1; б) 0,5 и 0,1(6). **3.** $\approx 0{,}106$. **4.** *Указание*. Чтобы перестановка имела единственную вереницу, она должна начинаться с единицы. **5.** *Указание*. Эта сумма должна равняться общему количеству перестановок длины n.

* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ — гармоническое число, $H_{2,n} = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ — гармоническое число второго порядка.