И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Задача 6

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

Задачи о совпадениях

Рассыпанные ключи, сумасшедший почтальон, игра в верю-не-верю и неподвижные точки в перестановке

Задача. За минуту до звонка огромная доска с запасными ключами, висящая в кабинете завуча Светланы Николаевны, вдруг сорвалась со стены, и ключи, звеня и подпрыгивая, рассыпались по полу. Все, что успела Светлана Николаевна, убегая на урок, это кое-как примостить доску на журнальном столике и развесить ключи на крючки как попало, дав себе слово, что сразу после уроков призовет учителя труда и они приведут все в порядок. Спрашивается, сколько ключей уже висит на своих крючках? Какова вероятность того, что на своем крючке ровно один ключ? ровно k ключей?

Я люблю начинать первый урок вероятности, причем неважно, в каком классе, с игры в сумасшедшего почтальона, который разносит письма случайным образом. Каждый из присутствующих на открытке или на простом листочке пишет что-нибудь приятное (например, «Как славно, что в этот солнечный полдень мы сидим в душном классе») или просто пожелание удачи. Открытки отправляются в почтовый ящик, которым может служить любой пакет, сумка, коробка и т.п. Затем тот, кто выбран на роль почтальона, тщательно перемешивает все открытки и доставляет их случайным образом — по одной каждому присутствующему, включая себя.

Пока идет несложная процедура сбора и раздачи писем, я спрашиваю школьников, сколько открыток, по их мнению, может вернуться к своим же авторам? Как правило, сразу кто-то говорит, что либо одна, либо ни одной. Большинство склоняется к тому, что совпадений не будет или будет мало. Более каверзный вопрос «*Кто верит в то, что совпадений не будет?*» поднимает много рук. «*Верите ли вы в то, что случится ровно одно совпадение?*» Еще несколько рук. Чем больше гипотетических совпадений я предлагаю, тем меньше школьников в них верит. В четыре совпадения не верит никто, кроме отчаянных фаталистов, а в пять или больше никто не верит никогда.

Кто-то обычно заявляет, что *каждый может получить свое же письмо*, правда, тут же поправляется, что *на самом деле* так случиться не может. Это — прекрасный пример того, насколько математика далека в сознании школьников от «на самом деле». Так *может* или *не может*? Приходим к тому, что чисто теоретически может, но рассчитывать на это не следует. Зато ясно, что совпадений *не может быть* на одно меньше, чем писем. Даже теоретически. Это понимают все и практически сразу.

Тогда я ставлю вопрос иначе: «*Как вы думаете, какое число совпадений наиболее вероятно?*» Со знанием дела на этот вопрос ответить невозможно, но удивительным образом почти все всегда согласны с тем, что наиболее вероятное число совпадений 0 или 1.

Если все развивается именно таким образом, у меня появляется шанс задать последний вопрос: «*А где граница между вашими «верю» и «не верю»? Как вы ее выбираете?*» На вопрос о грани-

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

це ответить сразу не может никто, да и не сразу тоже никто разумно не отвечает. Во многих вероятностных ситуациях можно сослаться на жизненный опыт, но не в этой — здесь интуиция работает опосредованно, подсказывая, что правдоподобно, на основе лишь неясных умозрительных представлений об удивительном и о справедливости мироустройства.

Обычно совпадений оказывается от 0 до 2. Те, кто предсказал правильно, радостно потирают руки, а мы подведем итог: наша интуиция хорошо оценивает средние, ожидаемые и иногда наиболее вероятные значения, но гораздо хуже работает, когда речь идет о разумных отклонениях. Никто в классе не может объяснить, как указать границу разумного. Никто не верит в пять совпадений, но не потому, что понимает, что это маловероятно, а потому, что это кажется слишком далеким от ожидаемого, хотя не ясно, где это ожидаемое и как измерять расстояние от него. И все же в этом опыте интуиция обычно не подводит.

Следующий вопрос заставляет школьников задуматься: *что будет, если такой эксперимент провести не в классе, а во всей школе или в целом городе, где сотни тысяч жителей*. Сколько разумно ждать совпадений, если писем не 20 или 30, а десять тысяч? Ребята быстро приходят к соображениям о двух противоположных тенденциях.

Первая — чем больше участников, тем ниже шансы *каждого* получить свое же письмо.

Вторая — чем больше участников, тем больше вероятность того, что *хотя бы кому-нибудь* достанется его же письмо.

Какая из тенденций победит? Иными словами — как меняется ожидаемое число совпадений при увеличении числа участников игры: повышается, понижается или, может быть, не меняется вовсе? А как меняется граница доверия: никто не верил в 5 совпадений из 30, но, может быть, 5 совпадений из 10 000 вполне правдоподобны?

Формализуем задачу: нужно изучить число *неподвижных точек* в случайной *перестановке*. Вовсе необязательно строго определять перестановку на произвольном множестве. Если заменить письма или их авторов натуральными числами, то перестановку длины n удобно представить как результат перепутывания натуральных чисел от 1 до n. Например, одна из перестановок длины 5 выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

В первой строке числа по порядку, а во второй — те же числа в произвольном порядке. Перестановку можно понимать как способ нумерации (число 1 получает номер 2, число 2 получает номер 4) или как функцию (число 1 переходит в 2, число 2 — в 4 и т.д.). Совпадение, или неподвижная точка — число, которое переходит само в себя. В приведенном примере неподвижных точек две: число 3 и число 5.

Изучим случаи, доступные для непосредственного перебора. Перестановок длины $n = 2$ всего две:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом первая перестановка как бы и не перестановка вовсе, поскольку порядок не изменился. Такие перестановки называются *тождественными*.

Найдем среднее число неподвижных точек в перестановках длины 2. Для этого заполним небольшую таблицу и выделим неподвижные точки в каждой перестановке.

Исходный порядок	1	2	Число неподвижных точек
Перестановка 1	1	2	2
Перестановка 2	2	1	0
		Всего	2

Всего перестановок две, и в них всего две неподвижные точки. Среднее число равно $\frac{2}{2}=1$. При этом число неподвижных точек имеет следующее распределение[1]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Изучим случай $n = 3$. Общее число перестановок теперь $3! = 6$, но и общее число неподвижных точек выросло до 6.

	1	2	3	
1	1	2	3	3
2	1	3	2	1
3	2	1	3	1
4	2	3	1	0
5	3	1	2	0
6	3	2	1	1
			Всего	6

Среднее снова 1. Распределение менее симметрично. Единица теперь не только среднее, но и наиболее вероятное значение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

[1] Автор очень надеется на то, что обозначение перестановок с помощью круглых скобок и обозначение распределений у читателя не путаются. Все же важно, что во второй строке распределения вероятности, сумма которых равна 1.

Случай $n = 4$ позволяет уже всем присутствующим уловить закономерность. Количество перестановок растет до $4 \cdot 3! = 4! = 24$: первая цифра может быть одной из четырех, а последующие три при этом переставляются шестью способами. Построив таблицу для 24 перестановок длины 4 и убедившись, что и среднее, и наиболее вероятное число неподвижных точек опять равно 1, школьники заявляют, что проверять это для 120 перестановок длины 5 они не намерены, но принцип понятен. Возможно, найдется проницательный ум, который сообразит, что каждое из n чисел оказывается неподвижным $(n-1)!$ раз, а всего перестановок $n!$, поэтому неподвижных точек $n \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = 1$. Он даже попытается все это объяснить. Скорее всего, его объяснения будут гениальными, но путаными и туманными. Это характерно для гигантов мысли, чьи чудовищные рассуждения позже превращаются в простые и понятные усилиями многочисленных, но не таких талантливых популяризаторов и толкователей.

Станем и мы в лагерь популяризаторов и объясним все просто и убедительно с помощью индикаторов случайных событий. Более того, разберемся не только со средним, то есть с математическим ожиданием числа неподвижных точек, но и с дисперсией, а это даст нам хотя бы намек на то, какие отклонения от среднего в данном случае следует считать неправдоподобно большими.

Математическое ожидание и дисперсия числа совпадений

Для каждого элемента перестановки с номером k рассмотрим событие A_k «*элемент является неподвижной точкой*» и индикатор[2] этого события I_k, который равен 1 или 0 в зависимости от того, произошло событие A_k или нет. Вероятность события A_k равна $\frac{1}{n}$ для каждого элемента. Здесь могут возникнуть сомнения, мол, если первый элемент неподвижен, то второй будет неподвижным уже с другой вероятностью, поэтому все непонятно. Это рассуждение хорошее, но не имеет отношения к делу. Ведь сейчас мы говорим *о каждом элементе отдельно*, рассматривая его без всякой связи с прочими. Никакой элемент не хуже всякого другого, поэтому вероятность того, что элемент k при перестановке перейдет сам в себя, одинакова для всех k и равна $\frac{1}{n}$.

[2] Чуть подробнее об индикаторах написано в конце предыдущей статьи цикла: «Задача Билли Бонса» (см. № 10).

Значит, индикатор I_k имеет распределение

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

и его математическое ожидание равно

$$\mathrm{E}I_k = \frac{1}{n}.$$

Общее число неподвижных точек X в перестановке равно сумме всех индикаторов:

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n. \qquad (1)$$

Переходя в этом равенстве к математическим ожиданиям, получаем:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Итак, противоборствующие тенденции уравновешивают друг друга, и среднее число неподвижных точек в случайной перестановке равно 1 независимо от длины перестановки.

Заметьте, мы доказали лишь, что среднее равно единице: $\mathrm{E}X = 1$. Мы не доказали, что 1 является наиболее вероятным числом перестановок, и сделать это непросто. Попробуем заняться этим позже.

Теперь попробуем разыскать дисперсию величины X. Как было бы хорошо, если бы индикаторы были независимы! Тогда дисперсию X мы нашли бы как сумму дисперсий индикаторов, поскольку для независимых случайных величин дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Но увы, индикаторы зависимы: это мы отмечали чуть выше, когда говорили о том, что неподвижность одного элемента влияет на вероятность неподвижности другого.

Поэтому придется искать дисперсию по общей формуле:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X.$$

Первое упрощение получается сразу, поскольку мы знаем, что $\mathrm{E}X = 1$:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X = \mathrm{E}X^2 - 1. \qquad (2)$$

Остается найти $\mathrm{E}X^2$ — средний квадрат величины X. Для этого снова обратимся к равенству и возведем обе части в квадрат:

$$X^2 = I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2 +$$
$$+ 2(I_1 I_2 + I_1 I_3 + \ldots + I_j I_k + \ldots + I_{n-1} I_n).$$

В скобках сумма всех возможных попарных произведений $I_j I_k$ при $1 \le j < k \le n$. Всего их

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ штук.}$$

С квадратами нет проблем: I_k равен 0 или 1, поэтому $I_k^2 = I_k$. Трудности с попарными произведениями. Но небольшие. Случайная величина $I_j I_k$ является индикатором события $A_j \cap A_k$, то есть события «*оба элемента j и k неподвижны*». Вероятность этого события равна $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$.

Поэтому для любой пары j и k

$$\mathrm{E}\left(I_j I_k\right)=\frac{1}{n(n-1)}.$$

Значит,

$$\mathrm{E}X^2=\mathrm{E}\left(I_1^2+I_2^2+\ldots+I_n^2\right)+$$
$$+2\mathrm{E}(I_1I_2+I_1I_3+\ldots+I_jI_k+\ldots+I_{n-1}I_n)=$$
$$=\mathrm{E}(I_1+I_2+\ldots+I_n)+2(\mathrm{E}(I_1I_2)+\mathrm{E}(I_1I_3)+\ldots$$
$$\ldots+\mathrm{E}(I_jI_k)+\ldots+\mathrm{E}(I_{n-1}I_n))=$$
$$=\mathrm{E}X+2\left(\underbrace{\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}}_{C_n^2\text{ одинаковых слагаемых}}\right)=$$
$$=1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}=2.$$

Следовательно,

$$\mathrm{D}X=2-1=1.$$

Стандартное отклонение тоже равно 1:

$$\sqrt{\mathrm{D}X}=1.$$

Как ни странно, дисперсия числа неподвижных точек тоже не зависит от длины перестановки.

Используем найденное стандартное отклонение как меру отклонения и попытаемся судить о том, какие отклонения X от среднего $\mathrm{E}X=1$ в реальности возможны. Стандартное отклонение — это некоторое среднее[3] отклонение от математического ожидания. Оно даже больше, чем среднее арифметическое отклонение. Считая, что отклонения от $\mathrm{E}X$ больше, чем $3\sqrt{\mathrm{D}X}$, крайне маловероятны, мы должны признать, что пять или больше совпадений встречается очень редко, а потому такое событие не заслуживает никакого доверия.

Разумеется, такое рассуждение нельзя считать совершенно строгим, зато оно хорошо объясняет суть происходящего.

Вероятность того, что совпадений нет или есть хотя бы одно

Мы легко нашли среднее число неподвижных точек в перестановке и дисперсию этой величины. Помогли индикаторы. Вероятность какого-то конкретного числа неподвижных точек найти намного труднее. Очень много задач, где вероятности ищутся сложнее, чем среднее, и эта — одна из них. Но мы не привыкли отступать. Разберемся окончательно с вероятностью того, что перестановка длины n содержит ровно k неподвижных точек.

Сначала рассмотрим случай $k=0$, то есть отсутствие совпадений. Обозначим B_0 событие «*неподвижных точек нет*» или, что то же самое, событие $X=0$. Перейдем к противоположному событию $B_{\geq1}=\bar{B}_0=\{X>0\}$, то есть к событию «*есть хотя бы одна неподвижная точка*». То, что мы сейчас будем делать, очень напоминает рассуждения, которые мы проводили, решая задачу Билли Бонса (см. № 9).

Пусть событие A_k состоит в том, что k-й элемент перестановки оказался неподвижной точкой. Например, в перестановке

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

неподвижны третий элемент и пятый, поэтому события A_3 и A_5 для этой перестановки осуществились, а события A_1, A_2 и A_4 — нет.

Очевидно,

$$B_{\geqslant1}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n,$$

поскольку событие $B_{\geqslant1}$ «*неподвижная точка*» наступает, если хотя бы один из n элементов оказался неподвижным. Вероятность каждого из событий A_m равна $\frac{1}{n}$; несложно найти вероятность пересечения любого набора из этих событий, но вот вероятность их объединения найти сложнее. Используем для этого формулу включения-исключения, выражая вероятность объединения через вероятности пересечений:

$$\mathrm{P}(B_{\geqslant1})=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\ldots$$
$$\ldots+\mathrm{P}(A_n)-\mathrm{P}(A_1\cap A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_3)-\ldots$$
$$\ldots-\mathrm{P}(A_j\cap A_m)-\ldots$$
$$\ldots-\mathrm{P}(A_{n-1}\cap A_n)+\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)+\ldots$$
$$\ldots+\mathrm{P}(A_i\cap A_j\cap A_m)+\ldots+\mathrm{P}(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n).$$

Мы знаем, что

$$\mathrm{P}\left(A_m\right)=\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n!}$$

для любого k и что

$$\mathrm{P}\left(A_j\cap A_m\right)=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{(n-2)!}{n!}$$

для любой пары событий. Аналогично

$$\mathrm{P}\left(A_i\cap A_j\cap A_m\right)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{(n-3)!}{n!}$$

для любой тройки событий, и так далее до

$$\mathrm{P}\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right)=\frac{1}{n!}.$$

При этом:

– событий A_m ровно $C_n^1=n$,

– попарных пересечений ровно $C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}$,

– пересечений по три $C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}$

и так далее. Значит,

$$\mathrm{P}\left(B_{\geq1}\right)=n\cdot\frac{1}{n}-\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{(n-2)!}{n!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{(n-3)!}{n!}-$$
$$-\frac{n!}{4!(n-4)!}\cdot\frac{(n-4)!}{n!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

[3] Точнее — среднее квадратичное.

Снова перейдем к интересующему нас событию B_0. При этом для единообразия у двух первых слагаемых допишем знаменатели 0! и 1!, которые равны 1:

$$\mathrm{P}(B_0)=1-\mathrm{P}(B_{\geq 1})=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}. \quad (3)$$

Получилась частичная сумма ряда e^x при $x=-1$. Даже если n не очень велико, можно считать, что вероятность отсутствия неподвижных точек равна

$$\frac{1}{e}=0{,}367\ldots,$$

а вероятность наличия хотя бы одного совпадения равна

$$\frac{e-1}{e}=0{,}632\ldots$$

Насколько быстро происходит стабилизация вероятностей, видно в таблице (рис. 1).

C6 | f_x | =C5+A6/ФАКТР(B6)

	B	C	D
1	Задача о совпадениях		
2			
3	n	P(B0)	P(B>=1)
5	1	0,00000000000000	1,00000000000000
6	2	0,50000000000000	0,50000000000000
7	3	0,33333333333333	0,66666666666667
8	4	0,37500000000000	0,62500000000000
9	5	0,36666666666667	0,63333333333333
10	6	0,36805555555556	0,63194444444444
11	7	0,36785714285714	0,63214285714286
12	8	0,36788194444444	0,63211805555556
13	9	0,36787918871252	0,63212081128748
14	10	0,36787946428571	0,63212053571429
15	11	0,36787943923361	0,63212056076639
16	12	0,36787944132128	0,63212055867872
17	13	0,36787944116069	0,63212055883931
18	14	0,36787944117216	0,63212055882784
19	15	0,36787944117140	0,63212055882860
20	16	0,36787944117145	0,63212055882856
21	17	0,36787944117144	0,63212055882856
22	18	0,36787944117144	0,63212055882856

Рис. 1. Excel таблица для расчета $\mathrm{P}(B_0)$ и $\mathrm{P}(B_{\geqslant 1})$

Вероятность того, что в перестановке длины *n* ровно *k* совпадений

Осталось найти все прочие вероятности, то есть вероятности того, что совпадений 1, 2, 3 или больше, вплоть до n. Кстати, с предпоследней и с последней вероятностями все понятно: они равны 0 и $\frac{1}{n!}$ соответственно. Но вот с другими — нет. Итак, найдем вероятность события B_k «*в перестановке длины n ровно k неподвижных точек*». Обозначим эту вероятность $p_{n,k}$. Выберем в перестановке k элементов (это можно сделать C_n^k способами), и пусть они будут неподвижными. Среди прочих элементов неподвижных быть не должно. Вероятность этого равна $p_{n-k,\,0}$, поэтому количество перестановок длины $(n-k)$ без неподвижных точек равно

$$(n-k)!p_{n-k,\,0}.$$

Мы как бы разбили нашу перестановку на две: первая длины k тождественная, где все элементы на своем месте (таких можно выбрать C_n^k), и вторая длины $(n-k)$ без неподвижных точек (таких ровно $(n-k)!p_{n-k,\,0}$).

Соединим их снова в одну перестановку и найдем, что общее число возможных способов получить перестановку длины n с ровно k неподвижными точками равно

$$C_n^k(n-k)!\,p_{n-k,\,0}=\frac{n!}{k!}p_{n-k,\,0}.$$

Чтобы получить вероятность перестановки с k совпадениями, полученное число нужно разделить на общее число перестановок $n!$:

$$p_{n,\,k}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{k!}\cdot p_{n-k,\,0}=\frac{1}{k!}p_{n-k,\,0}. \quad (4)$$

Осталось вспомнить, что в предыдущем пункте мы нашли величину $p_{n-k,\,0}$:

$$p_{n-k,\,0}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\approx\frac{1}{e}.$$

Это равенство является тем лучшим приближением, чем больше величина $(n-k)$. Например, если $n-k>10$,то отличие не превосходит 10^{-7}. Поэтому разумно считать, что вероятность ровно k неподвижных точек равна

$$p_{n,\,k}\approx\frac{1}{e\cdot k!} \quad (5)$$

и практически не зависит от n, если число k мало (намного меньше n). При больших k эта величина тем более не зависит от n, поскольку практически равна 0.

Дополним таблицу, составленную в MS Excel, расчетом по формуле (4). Ограничимся условием $k\leq 10$, поскольку при $k>10$ (и даже при $k=10$) вероятность k неподвижных точек заведомо меньше, чем 10^{-6}, при любом n. Учитывая разумное условие $n-k\leq 10$, ограничим таблицу по вертикали $n=20$.

Мы столкнулись с тем, что не только среднее число неподвижных точек не зависит от длины перестановки, но и вероятности $p_{n,\,k}$ тоже весьма устойчивы относительно n.

Прежде мы говорили о том, что доказать, что наиболее вероятное число неподвижных точек равно 1, непросто. Действительно: посмотрите на рисунок 2. Для $n=4$ наиболее вероятное число совпадений равно 0, а не 1. Дальше между 0 и 1 разгорается целое соревнование за право называться наиболее вероятным значением:

$$p_{5,\,0}<p_{5,\,1},\; p_{6,\,0}>p_{6,\,1},\; p_{7,\,0}<p_{7,\,1},\; p_{8,\,0}>p_{8,\,1}.$$

СУММ =ВПР($C8-E$3;$C$5:$D$24;2)/ФАКТР(E$3)

Задача о совпадениях

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1,0000000										
1	0,0000000	1,0000000									
2	0,5000000	0,0000000	0,5000000								
3	0,3333333	=ВПР($C8-E$3;$C$5:$D$24;2)/ФАКТР(E$3)									
4	0,3750000	0,3333333	0,2500000	0,0000000	0,0416667						
5	0,3666667	0,3750000	0,1666667	0,0833333	0,0000000	0,0083333					
6	0,3680556	0,3666667	0,1875000	0,0555556	0,0208333	0,0000000	0,0013889				
7	0,3678571	0,3680556	0,1833333	0,0625000	0,0138889	0,0041667	0,0000000	0,0001984			
8	0,3678819	0,3678571	0,1840278	0,0611111	0,0156250	0,0027778	0,0006944	0,0000000	0,0000248		
9	0,3678792	0,3678819	0,1839286	0,0613426	0,0152778	0,0031250	0,0004630	0,0000992	0,0000000	0,0000028	
10	0,3678795	0,3678792	0,1839410	0,0613095	0,0153356	0,0030556	0,0005208	0,0000661	0,0000124	0,0000000	0,0000003
11	0,3678794	0,3678795	0,1839396	0,0613137	0,0153274	0,0030671	0,0005093	0,0000744	0,0000083	0,0000014	0,0000000
12	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153284	0,0030655	0,0005112	0,0000728	0,0000093	0,0000009	0,0000001
13	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001
14	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001
15	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001
16	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001
17	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001
18	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001
19	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001
20	0,3678794	0,3678794	0,1839397	0,0613132	0,0153283	0,0030657	0,0005109	0,0000730	0,0000091	0,0000010	0,0000001

Рис. 2. В зеленой зоне, где $n - k > 10$, различий при разных n уже нет. Правее столбца М все вероятности пренебрежимо малы

Понятно, что это чередование вызвано знакочередующимся хвостом равенства (3). Можно было бы сказать «и так далее», но на самом деле различия быстро затухают, и уже при $n = 10$ вероятности 0 и 1 неподвижных точек совпадают до 6-го знака после запятой. Собственно, так и должно быть: мимолетного взгляда на формулу (5) достаточно, чтобы понять, что эти вероятности практически одинаковы, поскольку $0! = 1!$, и что они больше, чем все последующие. Таким образом, разумный ответ на вопрос о наиболее вероятном числе совпадений такой: наиболее вероятно, что случится 0 совпадений или 1 совпадение, причем вероятности этих событий одинаковы и равны e^{-1}, то есть 0,368.

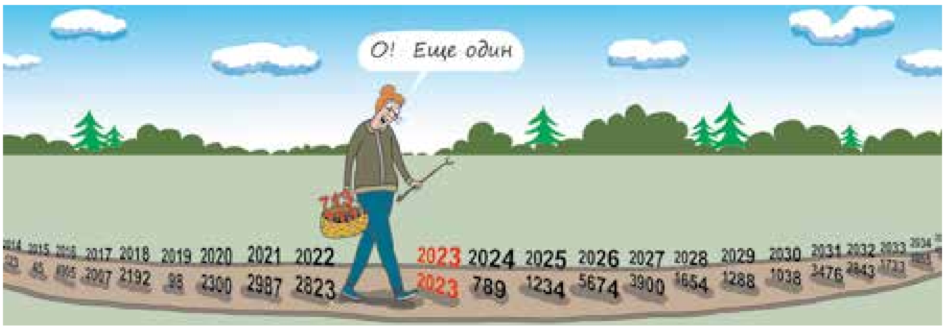
Как найти вероятности $p_{n,k}$ почти без алгебры

Всю алгебраическую часть двух предыдущих пунктов можно заменить одним вероятностным соображением. Возможно, вдумчивый читатель обратил внимание на схожесть равенства (5) с формулой вероятности в распределении Пуассона. Эта схожесть не случайна. Представим себе, что перед нами очень длинная перестановка, настолько длинная, что можно считать, будто совпадение в любом ее месте почти не влияет на вероятность совпадения в любом другом.

Будем двигаться вдоль этой перестановки, считая, что всю ее мы пройдем, скажем, за час час. Время от времени нам будут попадаться по дороге неподвижные точки, которые для нас образуют... пуассоновский поток, то есть случайные события, которые независимы (перестановка очень длинная) и наступают по одному (одна точка не может быть дважды неподвижной). Значит, для вероятности того, что случится ровно k таких событий, то есть попадется ровно k неподвижных точек, придется использовать формулу Пуассона

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Параметр λ имеет ясный смысл: среднее число событий за единицу времени (в нашем случае — за час), то есть среднее число совпадений во всей



пройденной перестановке. В начале статьи мы доказали, что $\lambda = \mathrm{E}X = 1$. Поэтому

$$p_k = \frac{1}{e \cdot k!}.$$

На самом деле нужно поставить знак приближенного равенства — все же мы помним, что даже в очень длинной перестановке неподвижные точки в разных местах не являются независимыми. Мы снова пришли к равенству (5). В прошлый раз мы получили его, отбрасывая малый хвост в числовом ряду e^{-1}. В этот раз — выдавая слабо зависимые события за совершенно независимые. Удивительным образом обе эти простительные вольности совпали по смыслу.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какова вероятность того, что в перестановке длины 8 элементы с номерами 3 и 7 окажутся неподвижными?

2. Будем называть в перестановке *единичным превышением* фрагмент

$$\begin{pmatrix} \ldots & a & \ldots \\ \ldots & a+1 & \ldots \end{pmatrix},$$

то есть ситуацию, когда числу a соответствует число на единицу больше. Каково среднее число единичных превышений в перестановке: а) длины 3; б) длины n?

3. Из барабана стиральной машины мама извлекает 14 носков, которые Миша носил прошлую неделю — по паре в день. Носки совершенно одинаковые, поэтому мама разбирает их по парам случайным образом. Назовем пару носков *неразлучной*, если оба эти носка были на Мише в какой-то день на прошлой неделе и воссоединились после стирки.

а) Каково математическое ожидание числа неразлучных пар?

б) Каков ответ в общем случае, когда носков не 14, а $2n$?

4. Будем называть в перестановке *недостатком* фрагмент

$$\begin{pmatrix} \ldots & a & \ldots \\ \ldots & b & \ldots \end{pmatrix},$$

если $b < a$. Рассмотрим случайную величину Y «количество недостатков в перестановке длины n».

а) Найдите математическое ожидание $\mathrm{E}Y$.

б)* Докажите, что дисперсия $\mathrm{D}Y$ равна $\frac{n+1}{12}$. Эта задача технически намного сложнее.

Ответы к задачам из статьи «Задача Билли Бонса»

1. $\frac{8!}{8^8} = 0{,}0024\ldots$

2. $\Delta^{10}\left(\frac{0}{10}\right)^{15} = 0{,}459\ldots$

3. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + c = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6} + c$, где $c \in \boldsymbol{R}$.

Указание. Функцию f нужно искать среди многочленов третьей степени вида $\frac{x^3}{3} + ax^2 + bx + c$.

4. *Доказательство.* Непосредственной выкладкой находим:

$$\sum_{i=k}^{n} f(n) = F(k+1) - F(k) + F(k+2) - F(k+1) + \ldots$$

$$\ldots + F(n+1) - F(n).$$

В правой части взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме $F(n+1)$ и $-F(k)$.

5. *Доказательство.* Решая задачу 3, мы нашли функции, у которых конечная разность равна n^2. Например, можно взять

$$f(n) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

В соответствии с результатом задачи 4

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = f(n+1) - f(1),$$

откуда получается требуемое равенство.

Окончание. Начало на с. 39.

10. Предлагаем обратить внимание на условные обозначения, направленные на формирование умения ученика работать с текстом. В системе обозначений появился новый значок, который показывает место в учебном тексте, где можно проверить по вопросам в конце пункта, хорошо ли понято прочитанное.


Условные обозначения

объяснительном тексте используются следующие обозначения:

— информация, на которую надо обратить внимание;

— информация, которую надо запомнить;

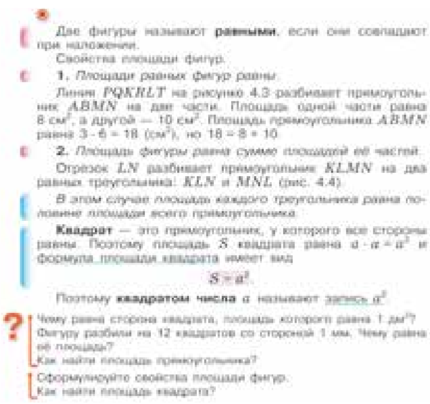
— самая важная информация, которую надо знать наизусть;

— вопросы для самоконтроля;

— место в учебном тексте, где можно проверить, хорошо ли понято прочитанное, отвечая на вопросы для самоконтроля.

Вопросы в конце пункта учебника разделены на соответствующие блоки.

5 класс


Две фигуры называют **равными**, если они совпадают при наложении.

Свойства площади фигур.

1. *Площади равных фигур равны.*

Линия $PQKRLT$ на рисунке 4.3 разбивает прямоугольник $ABMN$ на две части. Площадь одной части равна 8 см², а другой — 10 см². Площадь прямоугольника $ABMN$ равна 3 · 6 = 18 (см²), но 18 = 8 + 10.

2. *Площадь фигуры равна сумме площадей её частей.*

Отрезок LN разбивает прямоугольник $KLMN$ на два равных треугольника: KLN и MNL (рис. 4.4).

В этом случае площадь каждого треугольника равна половине площади всего прямоугольника.

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны. Поэтому площадь S квадрата равна $a \cdot a = a^2$ и формула площади квадрата имеет вид

$$S = a^2.$$

Поэтому **квадратом числа** a называют запись a^2.

Чему равна сторона квадрата, площадь которого равна 1 дм²?
Фигуру разбили на 12 квадратов со стороной 1 мм. Чему равна её площадь?
Как найти площадь прямоугольника?

Сформулируйте свойства площади фигур.
Как найти площадь квадрата?