И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

КОММЕНТАРИЙ К СТАТЬЕ М.В. ДОРОХОВОЙ


М. ДОРОХОВА

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОВЕДЕННЫХ ПРЯМЫХ С ОКРУЖНОСТЯМИ И ЕЕ ДОСТИЖИМОСТЬ

12

Статья[1] Марины Владимировны Дороховой посвящена задаче 123 из популярного пособия «Комбинаторика»[2].

Задача (с. 87). Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной окружности. Через каждые две точки проводится прямая, а через каждые три — окружность. Найдите наибольшее число точек пересечения проведенных прямых с окружностями (в предположении, что каждая пара прямая – окружность имеет две точки пересечения).

Марина Владимировна деликатно умолчала о причине, заставившей ее взяться за публичное решение ничем не примечательной задачи. Эта деликатность побудила меня написать разъяснение. Причина в том, что в самом пособии эта задача решена неверно. Вот решение, предложенное авторами в конце пособия.

Ответ: (с. 351) n точек определяют C_n^3 окружностей. Из их числа C_{n-1}^2 проходят через данную точку и C_{n-2}^1 — через данные две точки. Поэтому прямая, проходящая через две данные точки, имеет не более

$$2C_{n-2}^3+\left(2C_{n-1}^2-C_{n-2}^1\right)+2$$

точек пересечения с окружностями. Так как через n точек проходит C_n^2 прямых, то имеем не более чем

$$C_n^2\left(2C_{n-2}^3+2C_{n-1}^2-C_{n-2}^1+2\right)$$

точек пересечения.

Недолгое раздумье показывает, что полученное выражение дает неверный результат уже для трех точек, а само рассуждение порочно. Рискну воспроизвести его подробно.

Рассмотрим точки A и B из числа данных и прямую AB. С каждой из C_{n-2}^3 окружностей, которые не проходят через точки A и B, прямая AB может иметь две общие точки. Понятно, откуда взялось слагаемое $2C_{n-2}^3$ (которое следует положить равным 0 при $n \le 4$).

Рассмотрим окружности, проходящие через точку A. Их C_{n-1}^2. С каждой из них прямая AB имеет по одной точке пересечения, помимо точки A. Итого еще C_{n-1}^2 точек. И столько же общих точек с окружностями, проходящими через точку B, помимо B. Возникает слагаемое $2C_{n-1}^2$. Окружности, проходящие через обе точки

[1] *Дорохова М.В.* Верхняя оценка количества точек пересечения прямых и окружностей // Математика, 2025, № 6, с. 12.

[2] *Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А.* Комбинаторика. – М.: МЦНМО, 2025.

A и B, учтены дважды, поэтому один раз их нужно удалить из перечисления. Этих окружностей C^1_{n-2}. Так получается слагаемое $-C^1_{n-2}$. Осталось добавить сами точки A и B, поскольку в них пересечения, безусловно, есть. Так получается выражение

$$2C^3_{n-2}+2C^2_{n-1}-C^1_{n-2}+2.$$

Вероятно, так или примерно так рассуждали авторы решения, показанного в пособии. Впрочем, ручаться нельзя.

Первая ошибка — в слагаемом $-C^1_{n-2}$. Дело в том, что окружность, проходящая через точки A и B, пересекает прямую AB ровно два раза. Поэтому если уж рассуждать таким образом, то число C^1_{n-2} нужно вычитать не один раз, а два. Последующее умножение на число прямых C^2_n дополнительно усугубляет ситуацию.

В чем главная ошибка? Пытливый читатель уже догадался: каждая из n данных точек учитывается в выражении

$$C^2_n\left(2C^3_{n-2}+2C^2_{n-1}-C^1_{n-2}+2\right)$$

несколько раз, несмотря на робкую и к тому же неудачную попытку удалить повтор.

Справедливости ради скажу, что ошибки в приведенном решении устранимые. Если правильно учесть совпадения подсчитанных точек, полученное выражение можно довести до ума. Попробуйте сделать это.

В своей статье М.В. Дорохова предлагает более изящный подход. Она замечает, что любая из n данных точек является общей для всех проходящих через нее прямых и окружностей. То есть n точек у нас уже в кармане, и можно заняться перечислением прочих пересечений. Оказывается, что их

$$2C^3_{n-2}+2C^2_{n-2}=2C^3_{n-1}$$

для каждой прямой (как обычно, нужно считать нулевым число сочетаний, если верхний индекс больше нижнего). Не буду портить читателю настроение, разъясняя очевидный смысл слагаемых в этом выражении.

Все эти «прочие» точки не входят в исходное множество, поэтому *могут быть попарно различны,* и теперь умножение на число прямых C^2_n обретает смысл. *Верный ответ*:

$$n+2C^2_nC^3_{n-1}$$

или

$$n+\frac{n(n-1)^2(n-2)(n-3)}{6},$$

что то же самое.

Напомню, что это лишь верхняя оценка числа точек пересечения. Вопрос о том, для любого ли n возможно такое расположение точек, при котором полученная оценка достигается, остается нерешенным. Однако вопрос этот несложный, и я уверен, что его рассмотрение можно предложить интересующемуся математикой старшекласснику в качестве учебно-исследовательского проекта.

Окончание. Начало на с. 56.

Родители смогут помогать детям, потому что практически в каждом задании есть образец решения или объяснение, как выполнить тот или иной пример. В конце пособия почти ко всем заданиям есть ответы.

Тетради-тренажеры по математике для 5-х и 6-х классов издательства «Интеллект-Центр» это способ помочь школьникам приобрести уверенные навыки при выполнении арифметических действий с целыми и дробными числами. Эти тренажеры — часть серии тетрадей-тренажеров для 5–9-х классов. В первом полугодии 2025 года планируются к изданию тетради-тренажеры базового уровня по алгебре и началам математического анализа для 10–11-х классов и по геометрии.

Все пособия серии предназначены для формирования необходимых базовых знаний и навыков решения задач по математике, алгебре и геометрии.