МГУ, ЦПМ, МЦНМО

II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 02 февраля 2025 г.

10 класс. Ответы и решения

1. Турнир по олимпийской системе проходит в несколько туров: все игроки разбиваются на пары, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, победители снова разбиваются на пары. Так происходит, пока не останется последняя пара игроков; победитель в этой паре объявляется победителем турнира, а проигравший занимает второе место. Провести олимпийский турнир можно, если число игроков является степенью числа 2.

Однажды 96 теннисистов случайным образом разбились на две группы – малую, в которой 32 игрока и большую, в которой 64 игрока. Известно, что среди этих 96 теннисистов нет двух, играющих одинаково хорошо, и в любой встрече побеждает тот, кто играет лучше.

В малой группе был проведён Малый олимпийский турнир по теннису из пяти туров. В большой группе был проведён Большой олимпийский турнир из шести туров.

Какова вероятность того, что встрече победитель Малого турнира проиграет игроку, занявшему второе место в Большом турнире?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Большой турнир разбивается на два одинаковых «подтурнира», каждый из которых выявляет победителя предпоследнего тура (полуфинальной игры). Все пары в этих подтурнирах различны, но сначала в каждом ровно 32 игрока. Таким образом, получаем троих победителей трёх турниров по 32 игрока в каждом: финалиста A Малого турнира и полуфиналистов B и C Большого турнира.

Разбиение игроков случайно, поэтому Малый турнир и оба полуфинала Большого турнира проходят в одинаковых условиях. Значит, вероятность того, что из тройки A, B и C самым слабым окажется A, равна $\frac{1}{3}$.

2. В мешке n шариков с номерами от 1 до n. Из мешка достают 15 случайных шариков. При каком n будет наибольшей вероятность того, что среди выбранных шариков окажутся шарики с номерами 21, 190 и 2025?

Ответ: 2025.

Решение. При каждом n вероятность получения набора, в котором есть номера 21, 190 и 2025 и ещё 12 других номеров, равна

$$\frac{C_{n-3}^{12}}{C_n^{15}}=\frac{(n-3)!\cdot 15!\cdot (n-15)!}{12!\cdot (n-15)!\cdot n!}=\frac{2730}{n(n-1)(n-2)}.$$

Эта последовательность убывает с ростом n. Значит, n должно быть наименьшим возможным, то есть 2025.

3. В банде n разбойников, и любые двое либо знакомы друг с другом с вероятностью p независимо от прочих, либо не знакомы с вероятностью $q=1-p$. Назовём *компанией* четверых разбойников, если любые двое из этой четвёрки знакомы. Найдите математическое ожидание количества компаний в этой банде.

Ответ: $C_n^4 p^6$.

Решение. Пронумеруем всевозможные четвёрки разбойников числами от 1 до C_n^4. Пусть случайная величина I_j равна 1, если четвёрка с номером j является компанией, и пусть $I_j = 0$, если эта четвёрка компанией не является. Четвёрка является компанией, только если в ней образовались все шесть возможных знакомств, поэтому $\mathrm{P}\left(I_j = 1\right) = p^6$ для любого j.

Случайная величина X «*количество компаний*» равна сумме величин I_j: $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{C_n^4}$. Перейдём в этом равенстве к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_{C_n^4} = C_n^4 p^6 .$$

4. Велел отец сыну убрать камни с поля. Камней n, разбросаны они по полю случайно, а средний вес одного камня равен M кг. В первый день сын должен убирать камни до тех пор, пока под очередным случайным камнем не найдёт записку отца «Убери этот камень и хватит на сегодня, сынок». Остальные камни сын должен убрать на следующий день. Сравните математические ожидания двух величин: «*общий вес камней, убранных в первый день*» и «*общий вес камней, убранных во второй день*». Иными словами, какие камни и на сколько в среднем в сумме весят больше: те, которые сын уберёт в первый день, или те, которые он уберёт во второй?

Ответ: в первый день в среднем больше на M кг.
Решение. Назовём камень, под которым лежит записка, особым, а остальные камни – простыми. Пусть все простые камни, убранные в первый день, имеют общий вес X кг, простые камни, убранные во второй день, вместе весят Y кг, а особый камень весит m кг (это тоже случайная величина). Тогда в первый день убрано $X + m$ кг, во второй убрано Y кг камней, а разность равна $X + m - Y$ кг.

Каждый простой камень с одинаковыми вероятностями может оказаться убранным в первый или во второй день. Поэтому $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$. Тогда

$$\mathrm{E}(X + m) - \mathrm{E}Y = \mathrm{E}X + \mathrm{E}m - \mathrm{E}Y = \mathrm{E}m = M .$$

5. На окружности случайно и независимо друг от друга выбраны три точки. Какова вероятность того, что у треугольника с вершинами в этих точках все углы меньше, чем $120°$?

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.
Решение. Будем считать, что окружность числовая, имеет длину 2π, что точка A имеет на окружности координату 0, точки B и C – координаты x и y соответственно, причём $0 < x < y < 2\pi$ (рис.1). На координатной плоскости эти неравенства определяют треугольник F (рис. 2). Событие C «*угол* C *не меньше* $120°$» наступает, только если дуга AB не меньше, чем $240°$, то есть если $x > \dfrac{4\pi}{3}$. Это неравенство определяет внутри треугольника F меньший треугольник, площадь которого в 9 раз меньше площади треугольника F. Значит, событие C имеет вероятность $\dfrac{1}{9}$. В силу симметрии таковы же вероятности событий A «$\angle A..120^\circ$» и B «$\angle B..120°$».

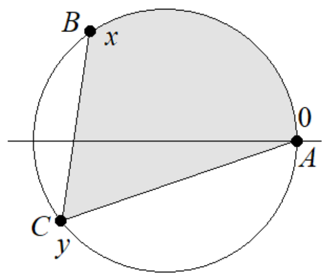

Рис. 1

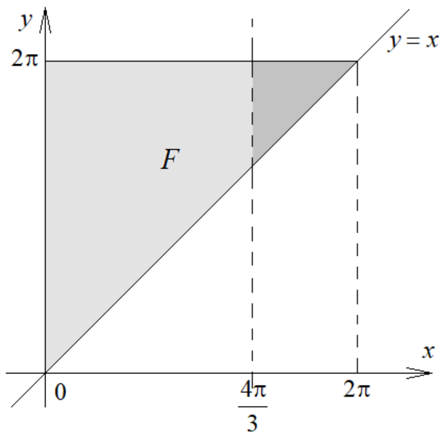

Рис. 2

Эти три события несовместны. Поэтому их объединение «*в треугольнике* ABC *есть угол, который не меньше* $120°$» имеет вероятность $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$. Следовательно, вероятность противоположного события «*все углы меньше* $120°$» равна $\frac{2}{3}$.

6. Три мухи одновременно садятся на незамкнутую ломаную ABC – по одной мухе в каждую вершину. Каждую минуту после этого каждая муха перелетает в одну из соседних вершин, выбирая её случайным образом независимо от других мух и предыдущих перелётов. Одновременно в каждой вершине может быть больше одной мухи. Найдите математическое ожидание величины «*время, через которое все три мухи окажутся снова в тех же вершинах, где были вначале*».

Ответ: 8 минут.

Решение. Присвоим мухам имена *A, B* и *C* в соответствии с названиями вершин, куда мухи сели вначале. Через нечётное число минут после этого мухи A и C обязательно окажутся в средней вершине B. Ещё через минуту они перелетят в концевые вершины ломаной, причём событие «*муха* A *перелетит в вершину* A, *а муха* C *– в вершину* C» имеет вероятность $\frac{1}{4}$. Муха B при этом обязательно окажется в точке B. Получается последовательность независимых одинаковых испытаний до первого успеха. С вероятностью $\frac{1}{4}$ в испытании наступает успех, то есть все мухи оказываются на своих местах.

Математическое ожидание числа таких испытаний до первого успеха равно 4, а поскольку каждое испытание занимает ровно две минуты, среднее время до наступления успеха равно 8 минут.