II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 02 февраля 2025 г.

9 класс. Ответы и решения

1. На Острове Невезения живут только зайцы и кролики. Известно, что на каждого островитянина в среднем приходится 10,56 островитян-кроликов. Какова вероятность того, что случайно выбранный житель острова окажется зайцем?

Ответ: 0,56.

Решение. Пусть на острове n кроликов. Тогда у каждого зайца n соседей-кроликов, а у каждого кролика $n-1$ соседей-кроликов. Значит, число 10,56 является средним двух соседних натуральных чисел $n-1$ и n, откуда $n=11$.

Если на острове m зайцев, то

$$\frac{m}{m+11}\cdot 11+\frac{11}{m+11}\cdot 10=10,56,$$

откуда $m=14$. Значит, такое получится, если на острове 14 зайцев и 11 кроликов. Искомая вероятность равна 0,56.

2. На острове Буяне все города связаны между собой дорогами так, что из каждого города в любой другой ведёт единственный путь, возможно, проходящий через другие города. Известно, что ровно из одного города выходит три дороги, ровно из одного – четыре дороги, ровно из одного – пять дорог и так далее: ровно из одного города выходит 20 дорог, а городов с бóльшим числом выходящих дорог нет. Сколько на острове городов, из которых выходит одна–единственная дорога?

Ответ: 173.

Решение. Рассмотрим граф городов и дорог. Пусть x – искомое количество вершин степени 1. Пусть y – количество вершин степени 2. По условию граф является деревом. Общее число рёбер, с одной стороны, равно

$$\frac{x+2y+3+4+5+\ldots+20}{2}=\frac{x}{2}+y+\frac{207}{2}.$$

С другой стороны, это число на единицу меньше числа вершин, то есть оно равно

$$x+y+18-1=x+y+17.$$

Приравняем полученные выражения:

$$\frac{x}{2}+y+\frac{207}{2}=x+y+17, \text{ откуда } x=173.$$

Легко убедиться в том, что такой граф существует.

3. Дан числовой набор

6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 11, 12.

К числам набора разрешается добавлять положительные числа с единственным условием: сумма всех добавленных чисел равна 8. Найдите наибольшее возможное значение медианы нового набора.

Ответ: 10,5.

Решение. Медиана данного набора равна 8. Пусть медиана полученного набора равна m. Это значит, что хотя бы 6 наибольших чисел нового набора не меньше m. Значит, нужно увеличивать наибольшие числа, добавляя к ним слагаемые.

1. Если $m>12$, получаем неравенство

$$2(m-8)+2(m-9)+(m-11)+(m-12)\leqslant 8,\ \text{откуда}\ m\leqslant \frac{65}{6}<12.\ \text{Противоречие.}$$

2. Если $11<m\leqslant 12$, то

$$2(m-8)+2(m-9)+(m-11)\leqslant 8,\ \text{откуда}\ m\leqslant \frac{53}{5}<11.\ \text{Противоречие.}$$

3. Если $10<m\leqslant 11$, то

$$2(m-8)+2(m-9)\leqslant 8,\ \text{откуда}\ m\leqslant 10{,}5.$$

Медиана 10,5 достигается, если к двум числам 8 добавить по 2,5, а к двум числам 9 добавить по 1,5 – в сумме 8.

4. В мешке n шариков, пронумерованных числами от 1 до n. Из мешка достают 7 случайных шариков. Их номера оказались 174, 20, 2025, 743, 4, 134 и 976. При каком n вероятность получить именно такой набор наибольшая?

Ответ: 2025.

Решение. При любом n вероятность получения любого набора из семи чисел равна $\frac{1}{C_n^7}$.

Эта последовательность убывает с ростом n. Значит, n должно быть наименьшим возможным, то есть 2025.

5. Турнир по олимпийской системе проходит в несколько туров: все игроки разбиваются на пары, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, победители снова разбиваются на пары. Так происходит, пока не останется единственная пара игроков; победитель в этой паре объявляется победителем турнира, а проигравший занимает второе место. Провести олимпийский турнир можно, если число игроков является степенью числа 2.

Однажды 96 теннисистов случайным образом разбились на две группы – малую, в которой 32 игрока, и большую, в которой 64 игрока. Известно, что среди этих 96 теннисистов нет двоих, играющих одинаково хорошо, и что в любой встрече побеждает тот, кто играет лучше.

В малой группе был проведён Малый олимпийский турнир по теннису из пяти туров. В большой группе был проведён Большой олимпийский турнир из шести туров. Какова вероятность того, что при встрече победитель Малого турнира проиграет:

а) победителю Большого турнира;

б) тому, кто занял второе место в Большом турнире?

Ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$.

Решение. Большой турнир разбивается на два одинаковых «подтурнира», каждый из которых выявляет победителя предпоследнего тура (полуфинальной игры). Все пары в этих подтурнирах различны, но в каждом сначала ровно 32 игрока. Таким образом, получаем троих победителей трёх турниров по 32 игрока в каждом: финалиста A Малого турнира и полуфиналистов B и C Большого турнира.

Разбиение игроков случайно, поэтому Малый турнир и оба полуфинала Большого турнира проходят в одинаковых условиях. Значит, вероятность того, что в тройке A, B и C самым сильным окажется B или C, равна $\frac{2}{3}$. Это даёт ответ на вопрос (а). Вероятность того, что самым слабым окажется A, равна $\frac{1}{3}$. Это ответ на вопрос (б).

6. В трёх случайных ячейках таблицы 3×3 спрятаны призы, а в оставшихся шести ячейках призов нет. Ячейки закрыты от любопытных взглядов картонками. За одну попытку игрок по очереди убирает две картонки. Если под обеими картонками призы, то игрок побеждает и забирает оба приза. Если это не так, открытые ячейки снова закрывают картонками, а игроку даётся следующая попытка (призы остаются на прежних местах). Найдите вероятность открыть два приза не более чем с трёх попыток при правильной (оптимальной) игре.

Автор А. Акимов

Ответ: $\frac{53}{84}\approx 0,631$.

Решение. Правильная игра означает, что игрок не открывает ячейки попусту: не открывает ячейку, если знает, что в ней нет приза, и открывает ячейку, зная, что в ней приз, только чтобы победно завершить игру.

Событие A «*трёх попыток не хватит*» может наступить в двух случаях.

1. После двух попыток не известно положение ни одного приза, то есть все четыре открытых ячейки пусты. Вероятность этого равна $\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{42}$. При этом следующая попытка не приведёт к успеху с вероятностью $1-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{7}{10}$ (если хотя бы одна из открытых ячеек пуста).

2. После двух попыток известно положение ровно одного приза. Вероятность этого равна

$$\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{10}{21}$$

(положение дроби с числителем 3 показывает, в каком именно по счёту открытом квадрате найден приз). При этом третья попытка не ведёт к успеху, если первая же открытая ячейка окажется пустой. Вероятность этого равна $\frac{3}{5}$.

По формуле полной вероятности получаем:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{42}\cdot\frac{7}{10}+\frac{10}{21}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{84}+\frac{24}{84}=\frac{31}{84}.$$

Следовательно, вероятность противоположного события «*трёх попыток достаточно*» равна $1-\frac{31}{84}=\frac{53}{84}\approx 0,631$.