# II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 02 февраля 2025 г.

## 8 класс. Ответы и решения

**1.** В дереве $n$ вершин. Найдите среднее арифметическое степеней всех вершин этого дерева.

**Ответ:** $2-\frac{2}{n}$.

**Решение.** В дереве количество рёбер на единицу меньше числа вершин. Поэтому сумма степеней всех вершин равна $2n-2$. Значит, средняя степень равна $\frac{2n-2}{n}=2-\frac{2}{n}$.

**2.** На Острове Невезения живут только зайцы и кролики. Известно, что на каждого островитянина в среднем приходится 10,56 островитян-кроликов. Какова вероятность того, что случайно выбранный житель острова окажется кроликом?

**Ответ:** 0,44.

**Решение.** Пусть на острове $n$ кроликов. Тогда у каждого зайца $n$ соседей-кроликов, а у каждого кролика $n-1$ соседей-кроликов. Значит, число 10,56 является средним двух соседних натуральных чисел $n-1$ и $n$, откуда $n=11$.

Если на острове $m$ зайцев, то

$$\frac{m}{m+11}\cdot 11+\frac{11}{m+11}\cdot 10=10,56,$$

откуда $m=14$. Значит, такое получится, если на острове 14 зайцев и 11 кроликов. Искомая вероятность равна 0,44.

**3.** Дан числовой набор

6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 11, 12.

Удалять или добавлять числа нельзя, но к любым имеющимся числам набора можно прибавлять положительные слагаемые с единственным условием: сумма всех добавленных слагаемых равна 8. Может ли медиана получившегося набора оказаться больше, чем 10,5?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Медиана данного набора равна 8. Пусть медиана полученного набора равна $m>10,5$. Это означает, что хотя бы шесть чисел в новом наборе не меньше $m$. Два наибольших числа и так больше чем 10,5. Значит, увеличены хотя бы четыре числа среди чисел с 1–го по 9–е. Наименьшие возможные добавленные слагаемые равны $m-8, m-8, m-9$ и $m-9$. Их сумма больше восьми: $4m-34>4\cdot 10,5-34=8$. Противоречие. Получить медиану больше чем 10,5 невозможно.

**4.** Рассеянный Учёный получил для обработки большой массив данных о результатах диагностических работ 2025 студентов по теории вероятностей по 100–балльной шкале (целые числа от 1 до 100). Медианный результат равнялся 35 баллам. Учёный начал думать, как лучше сгруппировать данные.

Сначала он сгруппировал их в интервалы 1 – 4, 5 – 8, 9 – 12, …, 97 – 100 баллов и оценил среднее арифметическое по серединам этих интервалов и их частотам. Получилось ровно 34,5 балла.

Затем Учёный сгруппировал данные в интервалы 1 – 5, 6 – 10, 11 – 15, …, 96 – 100 баллов. Оценка среднего, полученная при помощи середин этих интервалов, оказалась равна ровно 38,0 баллов.

Докажите, что Учёный где-то ошибся в своих вычислениях.

**Доказательство.** Предположим, что ошибки нет. Погрешность оценки, полученная за счёт группировки, не больше 1,5 балла при первой группировке и не больше 2 баллов при второй. Но различие между оценками равно 3,5 балла. Это значит, что в обоих случаях получилась наибольшая возможная погрешность: в первом случае в меньшую сторону, во втором – в бóльшую. Таким образом, все баллы, полученные студентами, оказались на правых границах интервалов при первой группировке и на левых границах при второй.

Количество студентов нечётно, значит, кто-то из них получил 35 баллов. Это значение не является границей интервала при первой группировке. Противоречие.

**5.** Из множества натуральных чисел от 1 до $2n$ выбирают случайно и независимо друг от друга три числа. Найдите вероятность того, что какие-то два из них в сумме дают $2n+1$.

**Ответ:** $\frac{6n-3}{4n^2}$.

**Решение.** Пусть выбраны числа $a, b$ и $c$. Рассмотрим три события

$$A=\{b+c=2n+1\},\ B=\{a+c=2n+1\} \text{ и } C=\{a+b=2n+1\}.$$

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2n}.$$

События $A, B$ и $C$ попарно независимы:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4n^2}.$$

Но $\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=0$, поскольку все три пары дают в сумме одно и то же число, только если $a=b=c$, а число $2n+1$ нечётно. Искомая вероятность равна

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=$$

$$=3\cdot\frac{1}{2n}-3\cdot\frac{1}{4n^2}=\frac{6n-3}{4n^2}.$$

**6.** Турнир по олимпийской системе проходит в несколько туров: все игроки разбиваются на пары, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, победители снова разбиваются на пары. Так происходит, пока не останется единственная пара игроков; победитель в этой паре объявляется победителем турнира, а проигравший занимает второе место. Провести олимпийский турнир можно, если число игроков является степенью числа 2.

Однажды 96 теннисистов случайным образом разбились на две группы – малую, в которой 32 игрока, и большую, в которой 64 игрока. Известно, что среди этих 96 теннисистов нет двоих, играющих одинаково хорошо, и что в любой встрече побеждает тот, кто играет лучше.

В малой группе был проведён Малый олимпийский турнир по теннису из пяти туров. В большой группе был проведён Большой олимпийский турнир из шести туров. Какова вероятность того, что при встрече победитель Малого турнира проиграет:

а) победителю Большого турнира;

б) тому, кто занял второе место в Большом турнире?

**Ответ:** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$.

**Решение.** Большой турнир разбивается на два одинаковых «подтурнира», каждый из которых выявляет победителя предпоследнего тура (полуфинальной игры). Все пары в этих подтурнирах различны, но в каждом сначала ровно 32 игрока. Таким образом, получаем троих победителей трёх турниров по 32 игрока в каждом: финалиста A Малого турнира и полуфиналистов B и C Большого турнира.

Разбиение игроков случайно, поэтому Малый турнир и оба полуфинала Большого турнира проходят в одинаковых условиях. Значит, вероятность того, что в тройке A, B и C самым сильным окажется B или C, равна $\frac{2}{3}$. Это даёт ответ на вопрос (а). Вероятность того, что самым слабым окажется A, равна $\frac{1}{3}$. Это ответ на вопрос (б).