II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 02 февраля 2025 г.

11 класс. Ответы и решения

1. Турнир по олимпийской системе проходит в несколько туров: все игроки разбиваются на пары, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, победители снова разбиваются на пары. Так происходит, пока не останется единственная пара игроков; победитель в этой паре объявляется победителем турнира, а проигравший занимает второе место. Провести олимпийский турнир можно, если число игроков является степенью числа 2.

Однажды 96 теннисистов случайным образом разбились на две группы – малую, в которой 32 игрока и большую, в которой 64 игрока. Известно, что среди этих 96 теннисистов нет двух, играющих одинаково хорошо, и в любой встрече побеждает тот, кто играет лучше.

В малой группе был проведён Малый олимпийский турнир по теннису из пяти туров. В большой группе был проведён Большой олимпийский турнир из шести туров. Какова вероятность того, что при встрече победитель Малого турнира проиграет игроку, занявшему второе место в Большом турнире?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Большой турнир разбивается на два одинаковых «подтурнира», каждый из которых выявляет победителя предпоследнего тура (полуфинальной игры). Все пары в этих подтурнирах различны, но в каждом сначала ровно 32 игрока. Таким образом, получаем троих победителей трёх турниров по 32 игрока в каждом: финалиста А Малого турнира и полуфиналистов В и С Большого турнира.

Разбиение игроков случайно, поэтому Малый турнир и оба полуфинала Большого турнира проходят в одинаковых условиях. Значит, вероятность того, что из тройки А, В и С самым слабым окажется А равна $\frac{1}{3}$.

2. Множество, состоящее из n последовательных натуральных чисел, назовём *отрезком натурального ряда длиной* n.

Из некоторого отрезка натурального ряда длиной n случайным образом выбирают 15 чисел. При каком n окажется наибольшей вероятность того, что среди выбранных окажутся числа 21, 190 и 2025?

Ответ: 2005.

Решение. При каждом n вероятность получения набора, в котором есть номера 21, 190 и 2025 и ещё 12 каких-то номеров, равна

$$\frac{C_{n-3}^{12}}{C_n^{15}}=\frac{(n-3)!\cdot 15!\cdot (n-15)!}{12!\cdot (n-15)!\cdot n!}=\frac{2730}{n(n-1)(n-2)}.$$

Эта последовательность убывает с ростом n. Поэтому n должно быть наименьшим возможным. Чтобы n было наименьшим, отрезок должен состоять из чисел от 21 до 2025, то есть в нём должно быть $n=2005$ чисел.

3. В банде n разбойников, и любые двое либо знакомы друг с другом с вероятностью p независимо от прочих, либо не знакомы с вероятностью $q=1-p$. Назовём четверых разбойников *странной четвёркой*, если один из них знаком с тремя остальными, но из этих троих никто не знает друг друга. Найдите математическое ожидание случайной величины «*количество странных четвёрок в банде*».

Ответ: $4C_n^4 p^3q^3$.

Решение. Пронумеруем всевозможные четвёрки разбойников числами от 1 до C_n^4. Пусть случайная величина I_j равна 1, если четвёрка с номером j является странной, и пусть $I_j = 0$ в противном случае. Вероятность того, что в произвольной четвёрке первый разбойник знает троих оставшихся, но эти трое попарно не знакомы, равна p^3q^3. Таковы же вероятности того, что «центром четвёрки» служит второй, третий или четвёртый разбойник. Поэтому $\mathrm{P}\left(I_j = 1\right) = 4p^3q^3$ для любого j.

Случайная величина X «*количество странных четвёрок*» равна сумме случайных величин I_j: $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{C_n^4}$. Перейдём в этом равенстве к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_{C_n^4} = 4C_n^4 p^3q^3.$$

4. Велел отец сыну убрать камни с поля. Камней n, разбросаны они по полю случайно, а средний вес одного камня равен M кг. В первый день сын должен убирать камни до тех пор, пока под очередным случайным камнем не найдёт записку отца «Убери этот камень и хватит на сегодня, сынок». Остальные камни сын должен убрать на следующий день. Найдите математическое ожидание случайной величины «*общий вес камней, убранных в первый день*».

Ответ: $\dfrac{n+1}{2}M$ кг.

Решение. Назовём камень, под которым лежит записка, особым, а остальные камни – простыми. Пусть все простые камни, убранные в первый день, имеют общий вес X кг, простые камни, убранные во второй день, вместе весят Y кг, а особый камень весит m кг (это тоже случайная величина). Тогда в первый день убрано $X + m$ кг, во второй убрано Y кг камней, а разность равна $X + m - Y$ кг.

Каждый простой камень с одинаковыми вероятностями может оказаться убранным в первый или во второй день. Поэтому $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$. Тогда

$$\mathrm{E}\left(X + m + Y\right) = 2\mathrm{E}X + M = Mn,$$

поскольку $\mathrm{E}m = M$ и Mn кг – общий вес всех камней на поле. Отсюда $\mathrm{E}X = \dfrac{n-1}{2}M$ кг, а математическое ожидание веса всех убранных в первый день камней равно

$$\mathrm{E}X + M = \frac{n+1}{2}M \text{ кг.}$$

5. На окружности случайно и независимо друг от друга выбирают три точки. Какова вероятность того, что у треугольника с вершинами в этих точках все углы окажутся меньше чем $120°$?

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

Решение. Будем считать, что окружность числовая, имеет длину 2π, что точка A имеет на окружности координату 0, точки B и C – координаты x и y соответственно, причём $0 < x < y < 2\pi$ (рис.1). На координатной плоскости эти неравенства определяют треугольник F (рис. 2). Событие C «*угол* C *не меньше* $120°$» наступает, только если дуга AB не меньше, чем $240°$, то есть если $x \ldots \dfrac{4\pi}{3}$. Это неравенство определяет внутри треугольника F меньший треугольник, площадь которого в 9 раз меньше площади треугольника F. Значит, событие C имеет вероятность $\frac{1}{9}$. В силу симметрии таковы же вероятности событий A «$\angle A..120^{\circ}$» и B «$\angle B..120^{\circ}$».

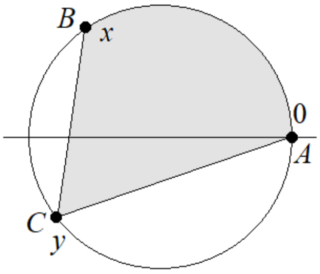

Рис. 1

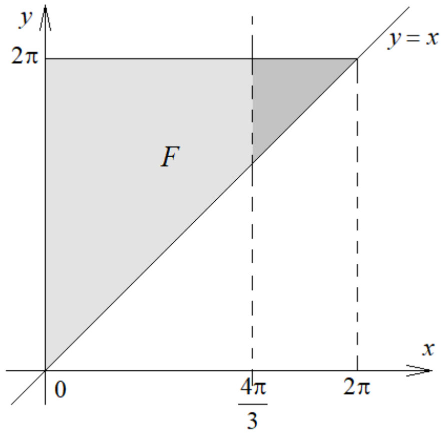

Рис. 2

Эти три события несовместны, и их объединение «*в треугольнике* ABC *есть угол, который не меньше* 120°» имеет вероятность $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$. Следовательно, вероятность противоположного события «*все углы меньше* 120°» равна $\frac{2}{3}$.

6. Три мухи одновременно садятся на равносторонний треугольник – по одной мухе в каждую вершину. Каждую минуту после этого каждая муха моментально перелетает в другую вершину, выбирая её случайным образом независимо от других мух и предыдущих перелётов. Одновременно в вершине может оказаться больше одной мухи. Найдите математическое ожидание величины «*время, через которое все три мухи окажутся в одной вершине*».

Ответ: 12 минут.
Решение. Обозначим цифрами 1, 2 и 3 состояния, когда все мухи сидят в вершинах поодиночке, когда ровно две вместе и когда все три вместе соответственно. Нужно найти среднее время перехода $1\to 3$, то есть перехода из состояния 1 в состояние 3. Обозначим это среднее время буквой x, а среднее время перехода $2\to 3$ назовём y.

Из состояния 1 мухи могут перелететь с вероятностью $\frac{1}{4}$ снова в состояние 1 и с вероятностью $\frac{3}{4}$ в состояние 2. В первом случае потрачена одна минута и опять требуется в среднем x минут. Во втором случае потрачена одна минута и требуется ещё в среднем y минут. Получаем равенство

$$x=\frac{1}{4}(1+x)+\frac{3}{4}(1+y),\text{ откуда } 3x-3y=4.$$

Из положения 2 возможны перелёты с вероятностью $\frac{5}{8}$ снова в состояние 2, с вероятностью $\frac{1}{4}$ в состояние 1 и с вероятностью $\frac{1}{8}$ в состояние 3. Поэтому

$$y=\frac{5}{8}(1+y)+\frac{1}{4}(1+x)+\frac{1}{8},\text{ откуда } -2x+3y=8.$$

Из двух полученных уравнений находим, что $x=12$.