Александра Нестеренко

Эссе на тему
Правильная многогранная кость

1. Начнем с пятигранника

Можно ли сделать пятигранную кость, у которой вероятность падения на любую из граней 1/5? Пятигранников всего два вида[1]:

1. С четырьмя треугольными и одной четырехугольной гранями.
2. С двумя треугольными и тремя четырехугольными гранями.

Лучшими кандидатами на кости с вероятностью 1/5 кажутся прямые призма и пирамида. У них некоторые грани неразличимы, и вероятности падения на эти грани равны автоматически. Только прямые пятигранники и будем дальше рассматривать.

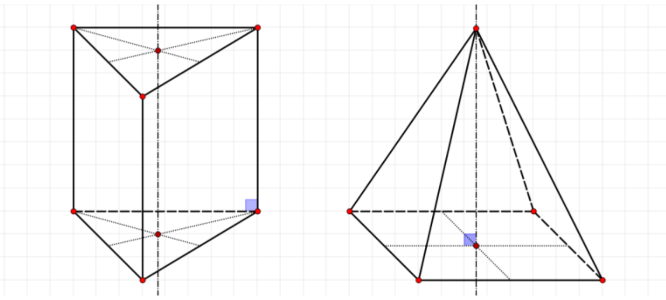


Рис. 1

Возьмем кость в форме призмы, сделанную из однородного материала. Благодаря симметрии основания призмы неразличимы, поэтому вероятность падения на одно основание равна вероятности падения на другое. Так же равны вероятности падения на каждую из боковых прямоугольных граней. Трудность в том, что вероятности падения на основания и боковые грани не обязаны быть одинаковыми.

Начнем с призмы с очень большой высотой по отношению к стороне основания. Для такой кости вероятность падения на основание близка к нулю, а вероятность падения на боковую грань чуть меньше, чем 1/3.

Будем непрерывно уменьшать отношение высоты к основанию. В конце концов получится почти плоская треугольная монета с вероятностью падения на основания, близкой к $1/2$, и близкой к нулю вероятностью оказаться лежащей на боковой грани.

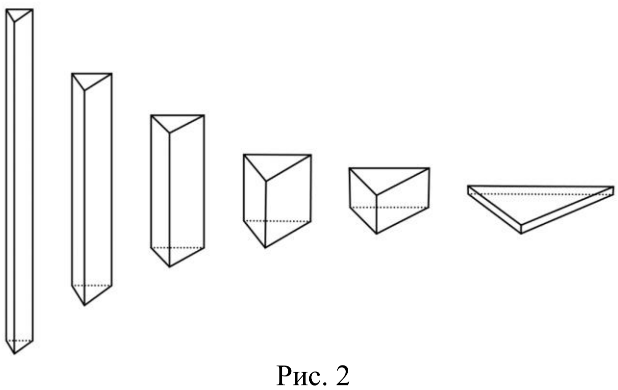


Рис. 2

[1] Этот факт не очевиден, но его можно доказать. Доказательство выходит за рамки эссе. Прим. оргкомитета.

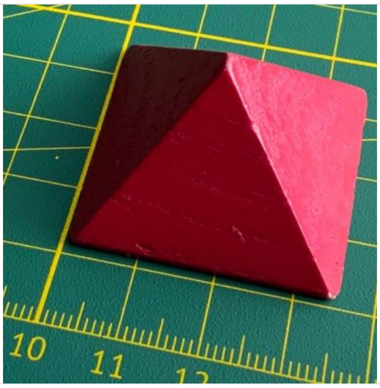
Где-то между этими крайними случаями должен быть такой, при котором вероятность падения на основание равна вероятности падения на боковую грань, и эта вероятность 1/5.

Аналогичное рассуждение можно применить и к пирамиде.

Кажется, кости с вероятностью граней 1/5 найдены, причем сразу двух видов. На самом деле, наверное, нет. Настоящая, правильная, «честная» игральная кость (как кубик), должна давать одинаковые вероятности граней всегда. На это не должны влиять ни сила броска, ни его направление, ни свойства поверхности, на которую падает кость. Так ли это для пятигранников?

2. Эксперимент с пятигранником

Для эксперимента нашлась деревянная пирамидка с квадратным основанием.



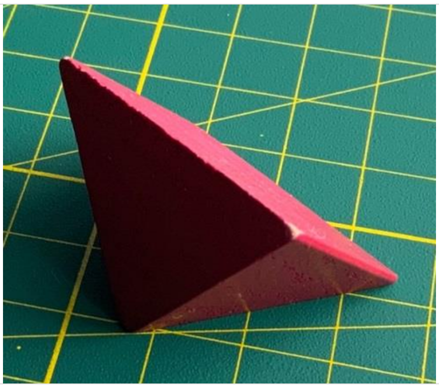


Рис. 3. Пирамидка с квадратным основанием 35 мм х 35 мм и высотой 22 мм.

Для того чтобы управлять силой бросков и при этом сохранить их случайность, использовался специально изготовленный «рандомизатор».

Рандомизатором послужила вертикальная труба с горизонтально натянутыми внутри нее капроновыми нитками. Длина трубы 57 см, внутренний диаметр 10 см. Десять горизонтальных нитей натянуты с шагом примерно 5 см, так что расстояние от первой до последней 47 см.

Вид сквозь рандомизатор

Рандомизатор подвешен в 5 см над ковром

Рис. 4

Пирамидка отпускалась в рандомизатор на уровне верхнего среза, и после нескольких столкновений с нитями и стенками вылетала из нижнего среза. Меняя высоту рандомизатора над поверхностью можно менять энергию пирамидки перед ударом.

В первой серии экспериментов пирамидка падала на ковер, тем самым моделируя неупругий удар. Высота нижнего среза трубы над полом была 5 см. Во второй серии – на лист текстолита толщиной 8 мм, нижний срез трубы был над ним на высоте 18 см. Так моделировался упругий удар. Подсчитывалось число «успехов», когда пирамидка останавливалась на квадратном основании[2].

Табл. Результаты серий бросков

Серия №	**1**	**2**
Поверхность	Ковер	Текстолит
Высота	5 см	18 см
Количество испытаний N_0	870	360
Количество успехов N ,	326	157
Частота успеха $f = N/N_0$	0,37	0,44
Выборочная оценка стандартного отклонення вероятности успеха $\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{N_0}}$	0,016	0,026

Во втором эксперименте вероятность успеха оказалась больше на 0,07.

Так как серии независимы, дисперсии складываются, и стандартное отклонение разности вероятностей равно $\sqrt{0,016^2+0,026^2}\approx 0,031$. Найденная в эксперименте разность частот в 2,3 раза больше стандартного отклонения. Поэтому расхождение в частотах вряд ли может быть случайным[3].

3. Почему вероятность может зависеть от условий бросков

В первой серии бросков, пирамидка падала с малой высоты на ковер, почти не отскакивала после удара и останавливалась в нескольких сантиметрах от места падения. Такой удар, видимо, можно считать близким к неупругому (при абсолютно неупругом ударе пирамидка бы сразу «прилипала» к поверхности).

В книге Ф. Мостеллера «50 занимательных вероятностных задач» разбирается задача о «толстой монете». Там обосновано, что если удар абсолютно неупругий, то вероятность падения на грань – это отношение телесного угла, под которым эта грань видна из центра тяжести, к полному телесному углу.

[2] Чтобы уменьшить возможное влияние износа пирамидки и рандомизатора со временем (например, натяжение нитей могло меняться), серии чередовались: 180 бросков первой серии, потом 180 второй, 330 первой, 180 второй и 360 первой.

[3] Проделанное Александрой рассуждение – сравнение разности частот со стандартным отклонением этой разности можно считать разновидностью теста Стьюдента при проверке гипотезы «разность частот обусловлена случайными отклонениями». Автор не использует критическую точку распределения Стьюдента, но справедливо полагает, что отличие в 2,3 раза - это большое отличие, и оно дает право считать такую разность неслучайным явлением. – Прим. оргкомитета олимпиады.

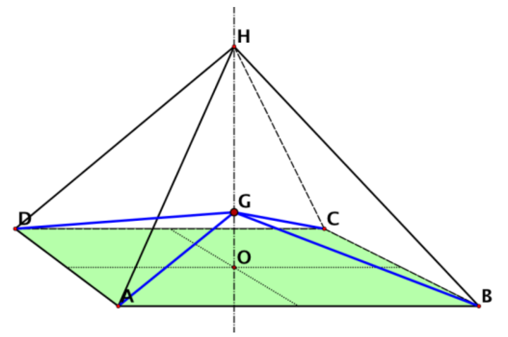


Рис. 5

Центр тяжести G пирамиды находится на расстоянии в четверть высоты от основания (рис.5). При помощи теоремы косинусов и теоремы Люилье https://ru.wikipedia.org/wiki/Телесный_угол, можно вычислить телесные углы, под которыми из центра тяжести пирамидки видны ее грани и основание. Телесный угол основания равен:

$$\Omega_b = 4{,}57 \text{ стерадианов.}$$

Тогда, для абсолютно неупругого удара, вероятность, что пирамидка упадет основанием вниз:

$$P_{неупр} = \frac{\Omega_b}{4\pi} \approx \frac{4{,}57}{12{,}56} = 0{,}36.$$

Хорошее совпадение с результатом измерений 0,37.

Во второй серии, когда пирамидка падала с большей высоты на твердый текстолитовый лист, она отскакивала после первого удара на несколько сантиметров вверх, и останавливалась в нескольких десятках сантиметров от места первоначального падения. Удар нельзя считать неупругим, энергия пирамидки гасится постепенно.

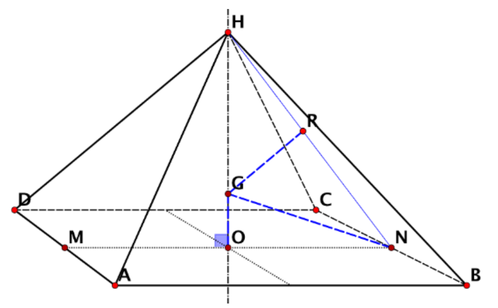


Рис. 6

Расстояния от центра тяжести пирамиды с основанием $35\text{ мм} \times 35\text{ мм}$ и высотой $OH = 22$ мм до граней:

$h_1 = GO = 5.5$ мм;
$h_2 = GR = 10.3$ мм;
до ребра BC:
$h = GN = 18.3$ мм

На рисунке 7 показано несколько положений пирамидки.

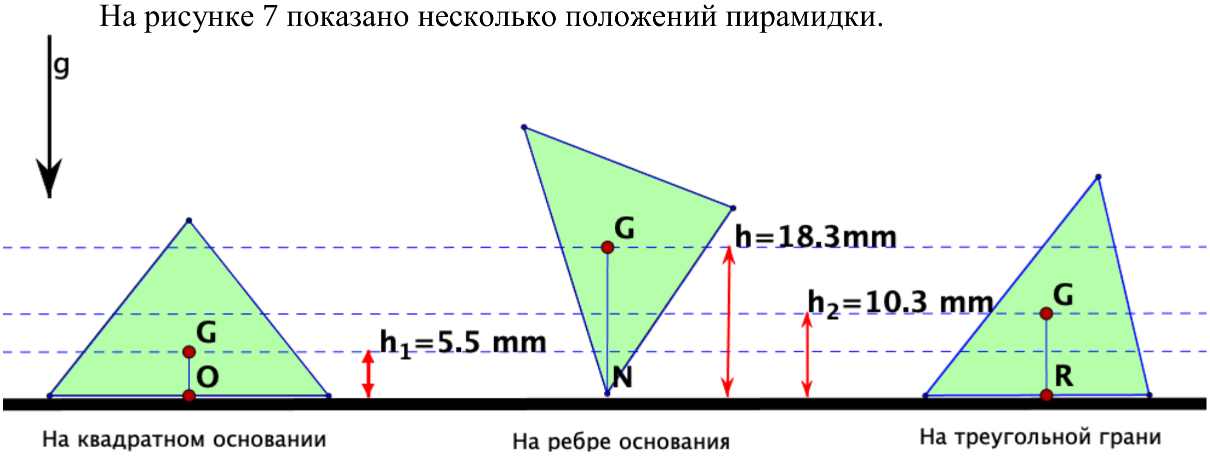


Рис. 7

Если пирамидка лежит на квадратном основании, ее центр масс ниже, чем если она лежит на треугольной грани. Положение на основании устойчивее.

Когда пирамидка отскакивает и катится по поверхности, для переворота с основания на боковую грань ей нужна кинетическая энергия $E_1 > mg(h - h_1)$, для переворота в обратную сторону $E_2 > mg(h - h_2)$.

Так как $E_1 > E_2$, может случиться так, что кинетической энергии достаточно только для переворота с боковой грани на основание. Но если возможен переворот с основания на боковую грань, то всегда возможен и обратный.

Поэтому при упругом падении шансов оказаться на основании у пирамидки больше, чем при неупругом. Так и получилось в эксперименте.

Разность вероятностей $P_{упр} - P_{неупр}$ должна расти с разностью высот $h_2 - h_1$. Если разность высот меняет знак, разность вероятностей должна менять знак тоже. Можно предположить линейную зависимость:

$$P_{упр} - P_{неупр} \sim h_2 - h_1$$

Разность вероятностей безразмерна, значит и справа должно быть безразмерное выражение. Разность высот надо разделить на еще какую-то длину, связанную с пирамидкой. Так, чтобы при увеличении пирамиды без изменения ее формы, разность вероятностей не менялась.

Делить надо, наверное, на высоту подъема центра тяжести, которая нужна для переворота. Чем больше эта высота, тем труднее перевернуться и тем меньше будет значить различие между h_2 и h_1.

У нас два таких кандидата в знаменатели: $h - h_1$ и $h - h_2$. Как выбрать не ясно, поэтому возьмем среднее арифметическое:

$$P_{упр} = P_{неупр} + C\frac{h_2 - h_1}{h - \frac{1}{2}\left(h_2 + h_1\right)} \tag{1}$$

Для данных из эксперимента безразмерный коэффициент C оказался приближенно равен 0,15

Получается, что есть, по крайней мере, два необходимых условия для «честной» многогранной кости, вероятность падения которой на любую грань одинакова независимо от условий броска.

1. Все грани должны быть видны из центра тяжести под равными телесными углами.
2. Центр тяжести должен быть равноудален от граней.

4. Могут ли правильные пятигранники быть «честными» костями

Отношение высоты к стороне основания правильного пятигранника можно подобрать так, чтобы любую грань было видно из центра тяжести под телесным углом $4\pi/5$. При неупругом падении таких пятигранников вероятность падения на любую грань будет 1/5. Результаты в таблице.

Пятигранник	H/a	h_1/a	h/a	h_2/a	$P_{неупр}$	$P_{упр}$	$\frac{P_{упр}-P_{неупр}}{P_{неупр}}$
Прямая пирамиды	1,67	0,42	0,65	0,36	0,20	0,17	-17 %
Прямая призма	0,53	0,27	0,39	0,29	0,20	0,23	14 %

H – высота пятигранника,

a – сторона основания,
h_1 – расстояние от центра масс до основания,
h – расстояние от центра масс до ребра основания,
h_2– расстояние от центра масс до боковой грани,
$P_{\text{неупр}}$- вероятность остановиться на основании при абсолютно неупругом падении,
$P_{\text{упр}}$ – вероятность остановиться на основании при упругом падении.

$P_{\text{упр}}$ в таблице – это оценка по формуле (1). Использовался коэффициент C, найденный из эксперимента.

Мы попытались найти прямой пятигранник с вероятностью падения на любую грань 1/5. Получилось, что вероятность падения на основание такого пятигранника может существенно меняться в зависимости от условий бросков. Вряд ли это можно назвать честной игральной костью.

Прямой пятигранник честной игральной костью быть не может[4].

Интересно, может ли найтись произвольный (не прямой) пятигранник, у которого все грани видны из центра тяжести под одинаковыми телесными углами и центр тяжести равноудален от всех граней? Мне кажется, скорее нет. Не у всех многогранников вообще есть внутренняя точка, из которой грани видны под одинаковыми углами. И не у всякого многогранника точка центра масс равноудалена от граней. А нужно, чтобы эти две точки не только были, но и совпадали.

5. Многогранники с шансами падения на любую грань 1/*N* для четных *N*

Конечно, есть пять правильных многогранников, из которых автоматически получатся «честные» кости с N = 4, 6, 8, 12, 20. Правильный многогранник можно вписать в сферу, и на каждой грани как на основании построить прямую пирамиду с вершиной на сфере так, чтобы вершина пирамиды и центр сферы были по разные стороны от плоскости грани.

Получатся еще честные кости с числом граней N = 12, 24, 24, 60 и 60.

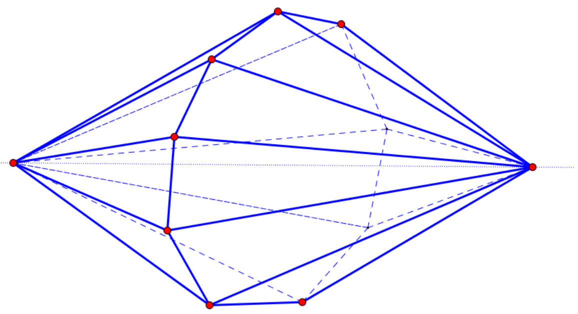


Рис. 8

Более универсальный способ – взять две одинаковые прямые пирамиды с правильными M-угольниками в основаниях, и сложить их основание к основанию. Получится $2M$ -гранное «веретено» с неразличимыми гранями (рис. 8).

Раз грани неразличимы, кость должна быть честной, то есть вероятность выпадения на любую грань равна $1/N$ независимо от условий, при которых проводятся бросания.

Но у такого «веретена» обязательно четное количество граней $N \geq 6$.

[4] По древней традиции неоднородные многогранники, например со свинцовыми дробинками внутри, «честными» не считаются.

6. Многогранники с шансами падения на любую грань $1/N$ для N, кратных трем и не меньших, чем 9

Можно предложить конструкцию многогранника с вероятностью падения на грань $\frac{1}{3M}$, где $M = 3, 4, 5, \ldots$.

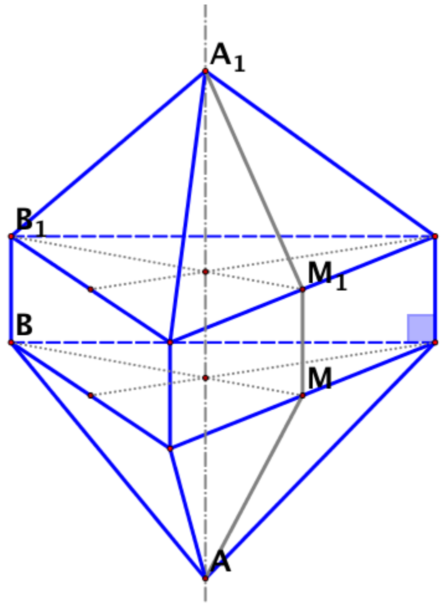


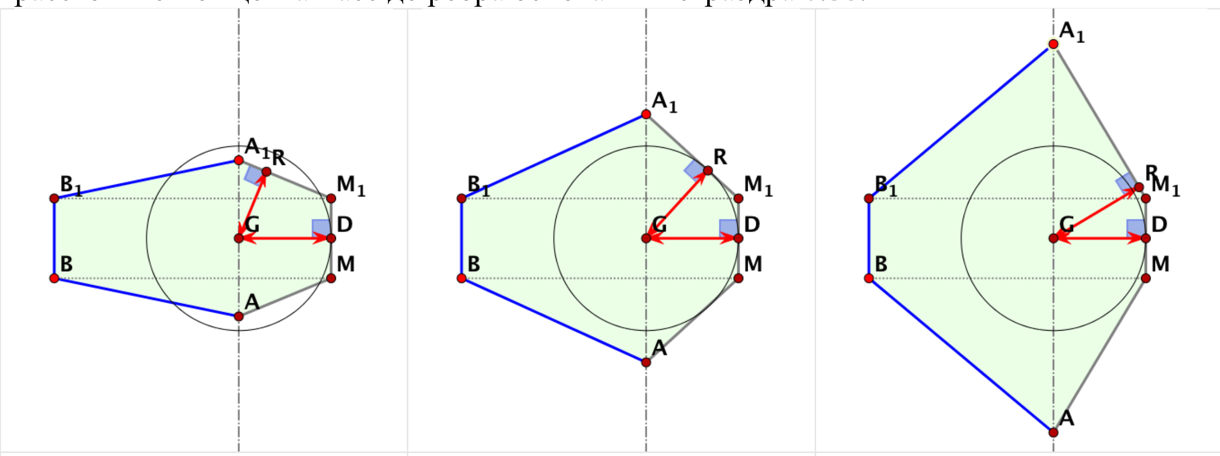
Рис. 9

Например, при N = 9 такой многогранник – это прямая призма с основаниями из правильных треугольников и построенными на этих основаниях одинаковыми прямыми тетраэдрами (рис. 9). Выберем отношение высоты призмы к стороне ее основания так, чтобы основания призмы были видны из ее центра под телесным углом $\frac{4\pi}{3}$ стерад. Тогда боковые грани призмы и тетраэдров автоматически (из-за вращательной симметрии с осью AA_1) видны из центра тяжести под одинаковыми телесными углами. Причем высоты тетраэдров можно менять как угодно, равенство телесных углов сохранится.

Высота призмы при этом оказывается равна приблизительно четверти стороны основания. У прямой призмы с правильным треугольником со стороной 1 в основании и высотой 0,25, расстояние от центра масс до основания равно 0,125, до боковой грани 0,31,до ребра основания 0,38.

Так как тетраэдры равны, центр масс всего девятигранника совпадает с центром масс призмы при любой высоте тетраэдров. Поэтому расстояние от центра масс девятигранника до граней призмы, а так же телесные углы, под которыми грани призмы видны из центра масс, не зависят от высоты тетраэдров.

Вначале пристроим на основания призмы тетраэдры нулевой высоты. Тогда расстояние от центра масс до граней тетраэдра 0,125. Будем непрерывно увеличивать высоту тетраэдров. В какой-то момент расстояние от центра масс до грани тетраэдра сравняется с расстоянием от цента масс до ребра основания тетраэдра 0.38.



$GR < GD$	$GR = GD$	$GR > GD$

Рис. 9

Где-то между этими положениями обязательно найдется высота, при которой расстояние до грани тетраэдра *GR* равно расстоянию до боковой грани призмы *GD*.

Найден многогранник с различимыми гранями, но у которого центр масс равноудален от всех граней и все грани из центра масс видны под одинаковым телесным углом.

Такой многогранник не обязательно будет идеально «честным»[5]. Но можно надеяться, что вероятность упасть на грань будет зависеть от условий броска меньше, чем в случае прямых пятигранников.

Комментарий оргкомитета

Эссе глубочайшее. Быстро разыскав общие способы построения костей с равными вероятностями граней при бросании (честных костей), автор заостряет внимание на физической стороне вопроса: останется ли честная кость для рыхлой поверхности честной, если ее бросать на твердую поверхность. Причина разного поведения костей на разных поверхностях в неправильности геометрической формы. Инерция вращательного движения приводит к тому, что при неупругом и упругом (с отскоком) ударе одна и та же кость будет вести себя по-разному. Исследуя этот вопрос, Александра Нестеренко формулирует утверждение: «*…по крайней мере, два необходимых условия для «честной» многогранной кости, вероятность падения которой на любую грань одинакова независимо от условий броска.*

3. *Все грани должны быть видны из центра тяжести под равными телесными углами.*
4. *Центр тяжести должен быть равноудален от граней*».

Заметим, что автор не утверждает, что это достаточные условия, подчеркивая, что эти условия только необходимые. Их недостаточность явствует, например, из того, что при упругом ударе рассматриваются только перекатывания «через ребро», а не «через вершину».

И даже последнее построение честных костей с числом граней, кратным 3, не удовлетворяет Александру полностью опять же из-за возможных перекатываний через вершину. Здесь автор просто ссылается на то, что «вращение предмета может быть удивительно сложным и даже причудливым».

Эссе является ярким образцом умелого и гармоничного сплетения геометрии и механики.

---

[5] Вращение предмета может быть удивительно сложным и даже причудливым. Как, например, на https://www.youtube.com/watch?v=N9HlQ-XVnFk. Эффект Джанибекова на видео объясняется разными моментами инерции для вращения вокруг разных осей. Многогранник вращается в полете, потом катится по столу. Если у него разные моменты инерции, не скажется ли это на вероятностях граней?